

数値計算

京都大学大学院情報学研究科
大木 健太郎

連絡先: ohki@i.kyoto-u.ac.jp

第12回

- 三重対角行列の固有値問題
- 特異値分解
- 関数近似

本日の内容

- ❖ 対称行列の固有値問題
 - ❖ 三重対角行列の固有値
 - ❖ **べき乗法**
 - ❖ Wielandt の逆反復法
 - ❖ 非対称行列の固有値問題
 - ❖ QR法
- ❖ 特異値分解
 - ❖ dqds法
 - ❖ mdLVs法
- ❖ 関数近似
 - ❖ 有限次数の近似多項式
 - ❖ 最小二乗近似

べき乗法

- 固有値の大きい方から数個の固有値, 固有ベクトルを求める方法

$$Au_i = \lambda_i u_i \quad |\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n|$$

$$x^{(k)} := A^k x^{(0)}, \quad \lambda_1 = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(x^{(k)})^\top x^{(k)}}{(x^{(k)})^\top x^{(k-1)}}$$

固有値

適当な初期値から出発

固有ベクトル

$$u_1 = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x^{(k)}}{\|x^{(k)}\|}$$

べき乗法

固有値と固有ベクトルの関係

$$Au_i = \lambda_i u_i \quad |\lambda_1| > |\lambda_2| > \cdots > |\lambda_n|$$

➡ $\forall x \in \mathbb{R}^n, x = \sum_{i=1}^n c_i u_i$

$$x^{(k)} = A^k x^{(0)} = \sum_{i=1}^n c_i \lambda_i^k u_i$$

$$= c_1 \lambda_1^k \left\{ u_1 + \sum_{i=2}^n \frac{c_i}{c_1} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^k \right\} \xrightarrow{k \gg 1} c_1 \lambda_1^k u_1 + \epsilon$$

1 未満

べき乗法

- 原理的には, u_1 成分を除いて同じように第二の固有値 λ_2 と固有ベクトルを求められる

$$y^{(k)} = A^k y^{(0)}, \quad y^{(0)} = x^{(0)} - u_1^\top x^{(0)} u_1$$

$$\lambda_2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(y^{(k)})^\top y^{(k)}}{(y^{(k)})^\top y^{(k-1)}}$$

- 数値誤差があると, 第一固有値の成分が大きくなってくるため, 数個程度の固有値・固有ベクトルを求めるために使われる

本日の内容

- ❖ 対称行列の固有値問題
 - ❖ 三重対角行列の固有値
 - ❖ べき乗法
 - ❖ Wielandt の逆反復法
 - ❖ 非対称行列の固有値問題
 - ❖ QR法
- ❖ 特異値分解
 - ❖ dqds法
 - ❖ mdLVs法
- ❖ 関数近似
 - ❖ 有限次数の近似多項式
 - ❖ 最小二乗近似

Wielandtの逆反復法：固有ベクトルを求める方法

- 固有値 λ_s の近似値 μ が得られた場合,

$$|\mu - \lambda_s| < |\mu - \lambda_j|, j \neq s \Leftrightarrow \left| \frac{1}{\mu - \lambda_s} \right| > \left| \frac{1}{\mu - \lambda_j} \right|, j \neq s$$



べき乗法が使える: $x^{(k)} = (\mu I - A)^{-1} x^{(k-1)}$

逆行列を求めておくか, 次の連立一次方程式を各ステップで解くことで固有ベクトルが得られる

$$(\mu I - A)x^{(k)} = x^{(k-1)}$$

- メリット**
- 固有ベクトルを求められる
 - 固有値の精度を改善できる

本日の内容

- ❖ 対称行列の固有値問題
 - ❖ 三重対角行列の固有値
 - ❖ べき乗法
 - ❖ Wielandt の逆反復法
 - ❖ 非対称行列の固有値問題
 - ❖ QR法
- ❖ 特異値分解
 - ❖ dqds法
 - ❖ mdLVs法
- ❖ 関数近似
 - ❖ 有限次数の近似多項式
 - ❖ 最小二乗近似

一般の固有値問題へのアプローチ

$$A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}, \lambda_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n$$

A の固有値 (求めたいもの)

相似変換は固有値を変えない

➡ 相似変換で上三角化を目指す

$$Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} * & \cdots & & & \\ 0 & * & \cdots & & \\ & 0 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & & 0 & * \end{bmatrix}$$

三角行列の対角成分は
固有値に一致

QR法：準備

Householder 法で用いた基本直交行列を用いる

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \mapsto P_1 x = \begin{bmatrix} \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{P_{n-1} \cdots P_2 P_1}_{=: Q^{-1}} A = \underbrace{\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ & r_{22} & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & r_{nn} \end{bmatrix}}_{=: R}, \quad r_{ii} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad A = QR$$

QR法: アルゴリズム

(i) 初期値の設定: $A_1 = A$

(ii) QR分解: $A_k = Q_k R_k, k = 1, 2, \dots$

(iii) ステップ更新: $A_{k+1} = R_k Q_k, k = 1, 2, \dots$

注意:

- ✓ 本質的には相似変換: $R_k = Q_k^{-1} A_k \Rightarrow A_{k+1} = Q_k^{-1} A Q_k$
- ✓ Hessenberg 標準系に変換してから行くと計算量減

QR法の収束

$$A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}, \lambda_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n$$

定理3.3

$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n| > 0$ とする.

$A_k = (a_{ij}^{(k)})$ がQR法によって生成されるとき,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{ij} = \begin{cases} 0, & i > j \\ \lambda_i, & i = j \\ \text{not converged in general,} & i < j \end{cases}$$

QR法の補足

- 固有ベクトルの計算は、逆反復法を用いる.
- シフト演算(3.9節)など、アルゴリズムの工夫がいくつもある.
→ Golub and Van Loan: Matrix Computations, 4th ed., 2013

本日の内容

- ❖ 対称行列の固有値問題
 - ❖ 三重対角行列の固有値
 - ❖ べき乗法
 - ❖ Wielandt の逆反復法
 - ❖ 非対称行列の固有値問題
 - ❖ QR法
- ❖ 特異値分解
 - ❖ dqds法
 - ❖ mdLVs法
- ❖ 関数近似
 - ❖ 有限次数の近似多項式
 - ❖ 最小二乗近似

特異値分解

- 特異値を求める問題は工学で頻繁に出会う
 - 主成分分析(データサイエンス, 統計学)
 - システム同定(システム制御)
- よく用いられる方法:
dqds法(Differential Quotient Difference with Shifts)
 - 数値的安定性, 計算速度, 精度が良い

特異値分解の概要

- 行列 A を直交行列を用いて上2重対角化
- 上2重対角行列の特異値分解

Householder法を繰り返して
上2重対角化

$$A^{(1)} = Q_{R1} A = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & \cdots & \cdots & a_{1m}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nm}^{(1)} \end{bmatrix}$$

乗算・加減算ともに

$$2n^2 \left(m - \frac{n}{3} \right) \text{ 回程度}$$

$$A^{(2)} = A^{(1)} Q_{L2} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & \cdots & a_{2m}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \cdots & \cdots & a_{nm}^{(2)} \end{bmatrix}$$

上2重対角行列の特異値問題

$$Q_R \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times m}, \quad Q_L \in \mathbb{R}^{m \times m}$$

$$Q_R A Q_L = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B \in \mathbb{R}^{r \times r}$$

dqds法の導出の概要

$B^\top B$ にシフト付きCholesky LR法を用いる

dqds法の導出法

$$B_1 = B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & & \\ & b_3 & \ddots & \\ & & \ddots & b_{2r-2} \\ & & & b_{2r-1} \end{bmatrix}$$

$$s_1 = 0, \quad s_k \in \left[0, (b_{2r-1}^{(k)})^2 + \sum_{i=1}^{k-1} s_i \right), \quad k = 2, 3, \dots$$

$$B_k B_k^\top - s_k I = B_{k+1}^\top B_{k+1} \quad \text{Cholesky分解}$$

対角成分 $(b_{2i-1}^{(k+1)})^2 + (b_{2i-2}^{(k+1)})^2 = (b_{2i-1}^{(k)})^2 + (b_{2i}^{(k)})^2 - s_k, \quad i = 1, \dots, r$

非対角成分 $b_{2i-1}^{(k+1)} b_{2i}^{(k+1)} = b_{2i+1}^{(k)} b_{2i}^{(k)}, \quad i = 1, \dots, r-1$

 ゼロに収束

dqds 法のアルゴリズム (要素毎)

$$q_i^{(k)} := (b_{2i-1}^{(k)})^2, \quad e_i^{(k)} := (b_{2i}^{(k)})^2, \quad d_i^{(k+1)} := q_i^{(k)} - e_{i-1}^{(k+1)} - s_k$$

$$q_i^{(k+1)} = d_i^{(k+1)} + e_i^{(k)}, \quad i = 1, 2, \dots, r$$

$$e_i^{(k+1)} = e_i^{(k)} \frac{q_{i+1}^{(k)}}{q_i^{(k+1)}}, \quad i = 1, 2, \dots, r-1$$

$$d_{i+1}^{(k+1)} = d_i^{(k+1)} \frac{q_{i+1}^{(k)}}{q_i^{(k+1)}} - s_k, \quad i = 1, 2, \dots, r$$

$$|e_r^{(k)}| < \epsilon \quad \Rightarrow \quad \sigma_r = \sqrt{q_r^k + \sum_{i=1}^{k-1} s_i}$$

B_k の r 行 r 列を除いて
 $r-1$ 次の行列に対して
同じようにして求める

特異値分解の補足

- 特異値分解の詳細は,
[杉原, 室田: 線形計算の数理, 岩波書店]
と, その参考文献を参照されたい
- 特異値分解のアルゴリズムは, 物理学とも関連がある(ソリトン, 可積分系).
 - mdLVs法(modified discrete Lotka-Volterra with shift)

mdLVs法

- 修正シフト付き離散 Lotka-Viltterra 法 (2006年) (modified discrete Lotka-Volterra with shift)

適切に選ばれた $\delta_k > 0$ に対し,

$$\bar{B}_k^\top \bar{B}_k = B_k^\top B_k + \frac{1}{\delta_k} I$$

$$\hat{B}_k^\top \hat{B}_k = \bar{B}_k \bar{B}_k^\top - \frac{1}{\delta_k} I$$

$$\underline{B_{k+1}^\top B_{k+1}} = \hat{B}_k^\top \hat{B}_k - s_k I$$

→ 対角行列に収束

メリット

- 数値誤差: dqds法よりよい
- スピード: dqds法より少し遅い
- 重複特異値の収束性の保証

Iwasaki M. and Nakamura Y., "Accurate computation of singular values in terms of shifted integrable schemes," Japan J. Indust. APPL. Math. 23 (2006), 239-259.

Lotka-Volterra方程式

- 被食者 (e.g., シマウマ), 捕食者 (e.g., ライオン) の平均数の方程式

Lotka-Volterra 方程式

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = x(t)(\alpha - \beta y(t)) \\ \frac{dy(t)}{dt} = -y(t)(\gamma - \delta x(t)) \end{cases} \quad \begin{array}{l} x: \text{被食者} \\ y: \text{捕食者} \end{array}$$
$$\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$$

dLVs法で t を固定して $t = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \delta_k$ を満たすようにパラメータを変化させると,

➡ **有限 Lotka-Volterra 方程式へ収束**

$$\frac{du_k(t)}{dt} = u_k(t)(u_{k+1}(t) - u_{k-1}(t)) \quad (k = 1, \dots, 2m-1) \quad u_0(t) \equiv 0, \quad u_{2m}(t) \equiv 0$$

本日の内容

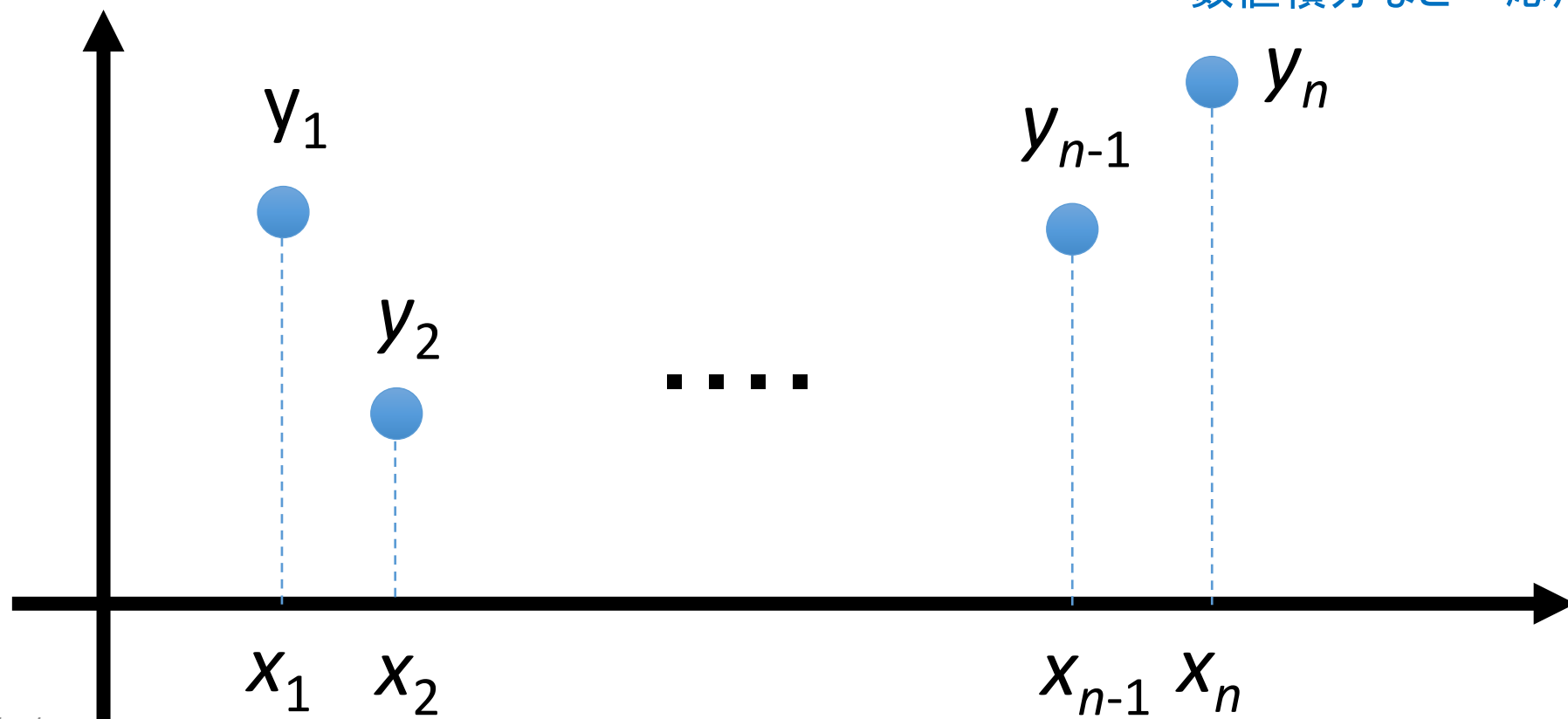
- ❖ 対称行列の固有値問題
 - ❖ 三重対角行列の固有値
 - ❖ べき乗法
 - ❖ Wielandt の逆反復法
 - ❖ 非対称行列の固有値問題
 - ❖ QR法
- ❖ 特異値分解
 - ❖ dqds法
 - ❖ mdLVs法
- ❖ 関数近似
 - ❖ 有限次数の近似多項式
 - ❖ 最小二乗近似

データと曲線フィッティング

与えられたデータから、尤もらしい関係式を与えたい

モチベーション: データのない箇所の推定値を知りたい

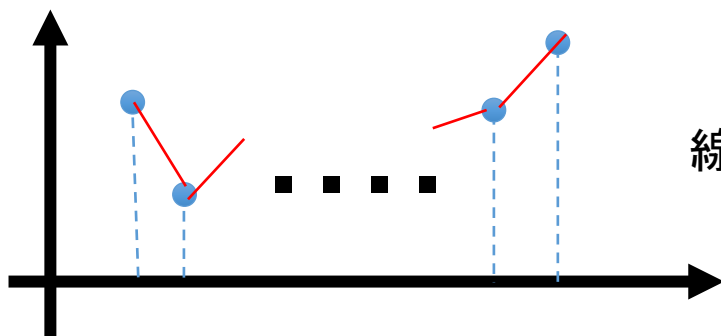
数値積分などへ応用



関数の近似

- 補間

- 与えられたデータは正確であると仮定
- 線形補間, Lagrange補間など



線形補間: データを直線で結ぶ補間法

- 最小二乗法:

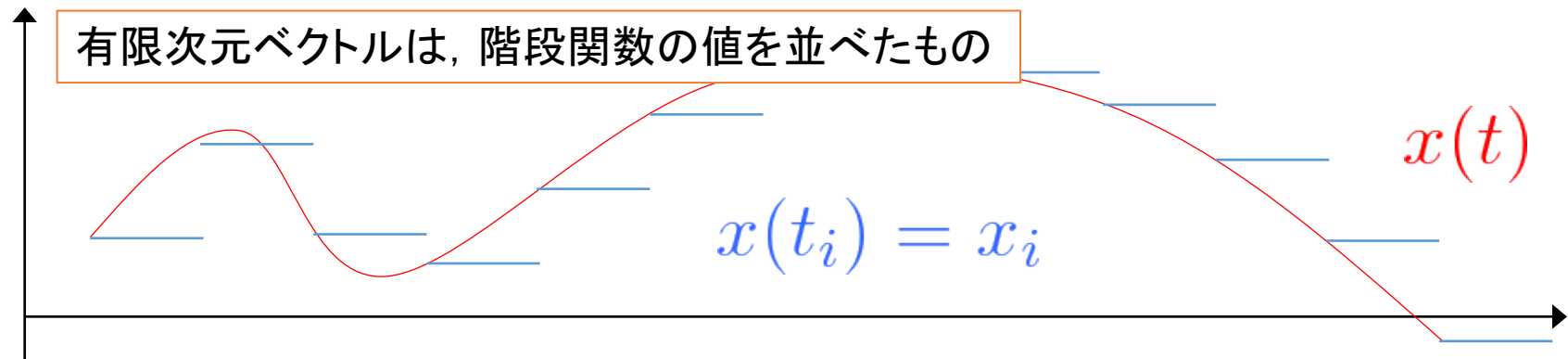
- 与えられたデータには誤差があると仮定

関数とベクトル

- 関数はベクトル: 和とスカラー倍が定義できる

要素毎に和が定義される \Rightarrow 関数 $x, y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ も同様

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \Rightarrow x(t) + y(t)$$



関数の測り方

- 関数の大きさを測る尺度: **ノルム**を利用

- $\|x\| \geq 0, \forall x \in X$ かつ $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, \forall x \in X, \alpha \in \mathbb{C}$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

- 関数間の類似度を測る尺度: **内積**を利用

- $\langle x, y \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}, \forall x, y \in \mathbb{C}$
- $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle, \forall x, y \in X, \alpha \in \mathbb{C}$
- $\langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle$
- $\langle x, x \rangle \geq 0$ かつ等号は $x = 0$ のときのみ

よく用いる関数空間: Hilbert空間

- $[a, b]$ 上の関数の集合に対し

- **内積**を次で定義

$$\langle u, v \rangle := \int_a^b u(x)v(x)dx$$

- **ノルム**を次で定義(ノルムの公理を満たすことが確認できる)

$$\|u\|_2 := \sqrt{\langle u, u \rangle}$$

- ノルムが有界になる関数の集合は完備になる
(**Hilbert空間**という)

“ノルム”の注意

- ノルムでゼロになる関数は、恒等的にゼロではない

$$\text{(例)} \quad u(x) = \begin{cases} 1, & x = \frac{a+b}{2} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\|u\|_2^2 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\frac{a+b}{2} - \epsilon}^{\frac{a+b}{2} + \epsilon} u(x) dx = 0$$

 $u = 0$ a.e. ほとんど至るところ (almost everywhere) でゼロ

ノルムとして使いたい尺度でゼロになる関数は、
ゼロとみなす

基本系と正規直交系

$$f_n(x) = \sum_{j=0}^n c_j \psi_j(x) \text{ とする}$$

• $\{\psi_j\}$ がノルム空間 $(X_\alpha, \|\cdot\|_\alpha)$ の**基本系**とは,

$$\forall f \in X_\alpha, \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{c_j, j=1,2,\dots} \|f - f_n\|_\alpha = 0$$

• $\{\psi_j\}$ がHilbert空間の**正規直交系** (ONS; orthonormal system) とは,

$$\langle \psi_i, \psi_j \rangle = \delta_{ij}$$

• **正規直交基底** (ONB; orthonormal basis) とは, 基本形かつ正規直交系

基本系の例：Weierstrassの定理

- 有限閉区間上の連続関数は、多項式でいくらでも近似できる。

ノルム空間：連続関数の集合とmaxノルム

$$(C([a, b]), \|\cdot\|_\infty) \quad \|u\|_\infty := \max_{x \in [a, b]} |u(x)|$$

多項式 $f_n(x) = \sum_{j=0}^n c_j \psi_j(x), \quad \psi_j(x) := x^j$



$$\forall f \in C([a, b]), \forall \epsilon > 0, \exists n > 0;$$
$$\min_{c_j, j=1, 2, \dots} \|f - f_n\|_\infty < \epsilon$$

本日の内容

- ❖ 対称行列の固有値問題
 - ❖ 三重対角行列の固有値
 - ❖ べき乗法
 - ❖ Wielandt の逆反復法
 - ❖ 非対称行列の固有値問題
 - ❖ QR法
- ❖ 特異値分解
 - ❖ dqds法
 - ❖ mdLVs法
- ❖ 関数近似
 - ❖ 有限次数の近似多項式
 - ❖ 最小二乗近似

有限次数の近似多項式

- Weierstrassの定理は, 多項式が存在することしか述べてない
⇒ 大きな次数の多項式にもなりうる
- 実際は適切な有限次元でとどめる必要がある

近似多項式問題のためのノルムの性質

i. 次の不等式を満たす正数 M_n が存在する

$$\|x^k\| \leq M_n, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

ii. $\sum_{k=0}^n b_k^2 = 1$ を満足する全ての (b_0, b_1, \dots, b_n) に対して,

$$0 < m_n \leq \left\| \sum_{k=0}^n b_k x^k \right\|$$

を満たす正の m_n が存在する

最良近似多項式の存在性

$$f_n(x) := a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$$

定理4.1

ノルムが先の条件 (i), (ii) を満たすならば,

$$\forall f \in C([a, b]),$$

$$\inf_{a_0, \dots, a_n} \|f - f_n\| = \min_{a_0, \dots, a_n} \|f - f_n\|$$

※ 下限を達成するパラメータが存在

本日の内容

❖ 特異値分解

- ❖ dqds法

- ❖ mdLVs法

❖ 関数近似

- ❖ 有限次数の近似多項式

- ❖ 最小二乗近似

- ❖ 直交多項式

最小二乗法

- 一次独立な関数の一次結合を考える

$$f_n(x) = \sum_{j=0}^n c_j \psi_j(x), \quad \|\psi_j\| = 1$$

- 関数 f を L_2 の意味で最小化するパラメータを探す

$$S_n := \|f - f_n\|_2^2$$

これを最小化したい

正規直交系の場合

- 正規直交系の場合は計算が簡単

$$\begin{aligned} S_n &:= \|f - f_n\|_2^2 = \langle f - f_n, f - f_n \rangle \\ &= \|f\|_2^2 - 2 \sum_{j=0}^n c_j \langle f, \psi_j \rangle + \sum_{j=0}^n c_j^2 \\ &= \sum_{j=0}^n \underbrace{(c_j - \langle f, \psi_j \rangle)^2}_{\text{red underline}} + \|f\|_2^2 - \sum_{j=0}^n |\langle f, \psi_j \rangle|^2 \end{aligned}$$



$$c_j = \langle f, \psi_j \rangle$$



$$\hat{f}_n(x) = \sum_{j=0}^n \langle f, \psi_j \rangle \psi(x)$$

最良近似

一次独立性のみを仮定

- 平方完成して整理

$$\begin{aligned} S_n &= \|f\|_2^2 - 2 \sum_{j=0}^n c_j \underbrace{\langle f, \psi_j \rangle}_{b_j} + \sum_{i,j=0}^n c_i c_j \underbrace{\langle \psi_i, \psi_j \rangle}_{=: a_{ij}} \\ &= \|f\|_2^2 - 2c^\top b + c^\top A c \\ &= (Ac - b)^\top A^{-1} (Ac - b) + \|f\|_2^2 - b^\top A^{-1} b \end{aligned}$$

正規方程式



$$Ac = b$$

※ $A = A^\top > 0$ に注意

最小二乗近似

- 正規方程式(連立一次方程式)を解くと,

$$c = A^{-1}b$$



$$\hat{f}_n(x) = \sum_{j=0}^n (A^{-1}b)_j \psi_j(x)$$

条件数が悪いと, 近似解の精度が悪くなる

条件数が悪くなる例：多項式

$$f_n(x) = \sum_{j=0}^n c_j \psi_j(x), \quad \psi_j(x) = x^j$$

- 多項式による正規方程式

$$Ac = b$$

$$a_{ij} = \langle \psi_i, \psi_j \rangle = \frac{1}{i+j+1} (b^{i+j+1} - a^{i+j+1})$$

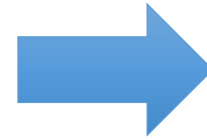
$$b_i = \langle \psi_i, f \rangle$$

n が大きくなると、行列 A の条件数が悪くなる

条件数を改善: 直交多項式

- Gram-Schmidtの直交化

$$p_0 = \frac{\psi_0}{\|\psi_0\|_2}$$
$$q_k = \psi_k - \sum_{j=0}^{k-1} \langle \psi_k, p_j \rangle p_j$$
$$p_k = \frac{q_k}{\|q_k\|_2}$$



直交多項式

$$\{p_k\}_{k=0}^n$$

L^2 ノルムの意味で最適な近似多項式

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n \tilde{c}_k p_k(x) \quad \tilde{c}_k = \langle p_k, f \rangle$$

密度関数を用いた内積・ノルム

- 有限次元の正定値対称行列 P を用いた内積

$$\langle x, y \rangle_P := x^\top P y = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j P_{ij}, \quad x, y \in \mathbb{R}^n$$

- 正定値対称行列の関数版

$$P(\cdot, \cdot) : [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$P(x, y) = P(y, x), \quad \iint_a^b f(x) P(x, y) f(y) dx dy > 0, \quad \forall f : \|f\|_2 \neq 0$$

- 内積・ノルム

$$\langle f, g \rangle_P := \iint_a^b f(x) P(x, y) g(y) dx dy, \quad \|f\|_P := \sqrt{\langle f, f \rangle_P}$$

よく用いる密度関数

- 対角行列の関数版

$$P(x, y) = w(x)\delta(x - y)$$

- 関数 w の条件

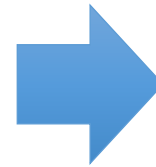
$$\left\{ \begin{array}{l} w(x) > 0, \quad \forall x \in [a, b] \\ \int_a^b x^k w(x) dx < \infty, \quad \forall k \in \mathbb{N} \end{array} \right.$$

密度関数を用いた正規直交多項式

- Gram-Schmidt の直交化

$$p_0 = \frac{\psi_0}{\|\psi_0\|_w}$$
$$q_k = \psi_k - \sum_{j=0}^{k-1} \langle \psi_k, p_j \rangle_w p_j$$
$$p_k = \frac{q_k}{\|q_k\|_w}$$

直交多項式



$$\{p_k\}_{k=0}^n$$

重み付き L^2 ノルムの意味で最適な近似多項式

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n \tilde{c}_k p_n(x) \quad \tilde{c}_k = \langle p_k, f \rangle_w$$

直交多項式展開

- 定められた内積における直交多項式: $\{p_k\}_{k=0}^{\infty}$

- 直交多項式展開

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k p_k(x), \quad c_k = \langle p_k, f \rangle_w$$

n 次で打ち切ると, L_2 ノルムによる f の最良近似多項式

非直交関数が嬉しくない例

- 次数を変えると係数を計算し直す必要がある

$$f(x) = \sin(x), \quad x \in [0, \pi]$$

$$f_1(x) = \frac{2}{\pi} + 0 \times x$$

異なる

$$f_2(x) = \frac{12(\pi^2 - 10)}{\pi^3} - \frac{60(\pi^2 - 12)}{\pi^4}x + \frac{60(\pi^2 - 12)}{\pi^5}x^2$$

直交多項式の場合

- 直交多項式

$$\left\{ \begin{array}{l} p(x) = 1 \\ p_1(x) = x - \frac{1}{2}\pi \\ p_2(x) = x^2 - \pi x + 16\pi \end{array} \right.$$

- 増やした次数分だけ計算すればよい

$$f(x) = \sin(x), \quad x \in [0, \pi]$$

$$f_1(x) = c_0 p_0(x) + c_1 p_1(x)$$

$$f_2(x) = c_0 p_0(x) + c_1 p_1(x) + c_2 p_2(x)$$

次回の内容

- ❖ 関数近似の続き
 - ❖ 直交多項式
 - ❖ 補間問題