- 必須：Web page にある指定の表紙をつけ，氏名，所属，学籍番号を明記すること．
- 必須：A4 用紙で提出すること．
- 印刷の場合は，なるべく両面印刷にすること．
- 計算機で計算した場合，用いたプログラムをレポートには載せる必要はない．
- 問題に明らかな誤植がある場合は，訂正して解いてよい．ただし，訂正箇所と訂正後の文を明記すること．
- 解けない場合は，“問題の意味がなくならない程度”に，自分が解けるまで問題を易しく変更してよい．ただし，その旨を明記すること．その場合，作成した問題に応じて点数は割り引く．
- レポート課題は，複数人（学生，先輩，研究員など，誰でも可）で解くことを推奨する．
- 必須：複数人で解く場合，一緒に取り組んだ人の名前を記載すること．名前を間違えた場合は，減点する．

1　浮動小数点数

問題 1 (浮動小数点数表示)**.** 以下の数を 10 進 8 桁および 2 進 10 桁で浮動小数点数表示せよ．

(1) $\dfrac{1}{4754321}$.

(2) $\log\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$. ただし，log は底が 10 の対数関数を表す．

(3) $\exp(-\tan(\pi/8)-1)$

問題 2 (丸め誤差とその評価)**.** 以下の数を 10 進 3 桁で表したとき，誤差を評価せよ．この場合評価とは, 真の値が x_* であるとき, 浮動小数点数 x_R との差の絶対値 $|x_*-x_R|$ が, 正の実数 ϵ で抑えられるかをいう．ϵ は 10 進 2 桁の浮動小数点数で表し, $|x_*-x_R|<\epsilon$ を満たす最小の値を求めよ．

(1) $\sin\left(\dfrac{\pi}{7}\right)$.

(2) $\dfrac{4}{9}+\pi-3.1415$.

問題 3 (ネイピア数，円周率の表現)**.**　(1) ネイピア数 e は次の極限で定義できる．

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

これを数値計算上で実装するには，n を有限数で打ち切る必要がある．

$$e_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

この計算過程において 10 進 4 桁の浮動小数点数で計算するとき，n はいくつあれば，e の 10 進 2 桁の浮動小数点数 2.7 を達成するか？

(2) 指数関数 e^x，$x\in\mathbb{R}$ は，上の式とは別に

$$e^x:=1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^m}{m!}$$

とも定義される．これより，

$$f_n(x) := 1 + \sum_{m=1}^{n} \frac{x^m}{m!}$$

で定義される関数 f_n に対し，

$$|e^{10} - f_n(10)| < 0.1$$

となる最小の n を答えよ．ただし，e^{10} および $f_n(10)$ の計算は，用いた計算機のデフォルトの浮動小数点数を用いてよい．

問題 4 (誤った解となる数値計算)**.** 講義で紹介したように，浮動小数点数表示では，正数 a, b に対して

$$a^2 + b^2 < 2ab$$

となる計算結果が得られることもある．10 進 3 桁の浮動小数点数表示の場合，このような計算結果を返す数値例を 1 つ挙げよ．また，このような計算結果になる理由を考察して述べよ．

2　ノルムとその評価

問題 5 (ノルムの性質)**.** 以下ではベクトルに対するノルムを $\|\bullet\|$ で表し，誘導ノルムを行列のノルムという意味で $\|\bullet\|_M$ で表す．次の問いに答えよ

(1) $\|y\|_2 = 1$ を満たす $y \in \mathbb{R}^2$ の全体は，単位円になる (図 1)．$\|y\|_1 = 1$, $\|y\|_\infty = 1$ となる $y \in \mathbb{R}^2$ の集合を図示せよ．

(2) $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ と任意の $y \in \mathbb{R}^n$ に対し，$\|Ay\| \le \|A\|_M \|y\|$ が成り立つことを示せ．

(3) $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ に対し，$\|AB\|_M \le \|A\|_M \|B\|_M$ が成り立つことを示せ．

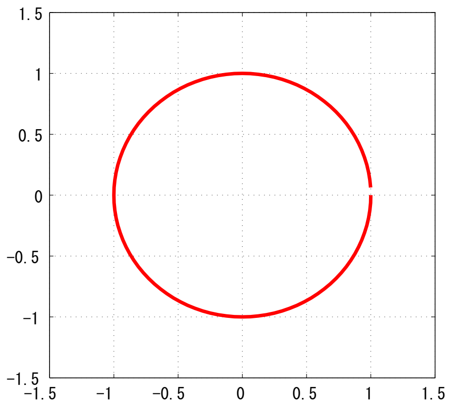

図 1　$\|y\|_2 = 1$ を満たす $y \in \mathbb{R}^2$ の集合．

問題 6 (条件数)**.** 次の行列の条件数を求めよ．ただし，ノルムは Euclid ノルムの誘導ノルムを用いることとする．小数点で表すならば, 10 進 3 桁の浮動小数点数で表すこと．

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix},\ A_4 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

3　連立一次方程式

問題 7 (Gauss の消去法)**.** 次の方程式は, 熱拡散方程式として知られる

$$\frac{\partial u(t,y)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(t,y)}{\partial y^2} + q(y)$$

ここで変数 t は時間, 変数 y は位置を表し, $q(y)$ は位置 y における発熱を表す．適当な境界条件のもと, 定常状態の熱 $u(y) \equiv u(\infty, y)$ は, 次の微分方程式を解けばよい．

$$\frac{\partial^2 u(y)}{\partial y^2} + q(y) = 0$$

ここで微分を差分化すると, この問題は次の連立一次方程式を解くことに帰着する．

$$Ax_i = b_i,\ i = 1,2,3 \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \tag{1}$$

b_i は, 関数 q に依存する．ベクトル $b_i \in \mathbb{R}^4$ を次のように与えるとき, Gauss の消去法を用いて解 x_i を求めよ（LU 分解を用いてもよい）．数値的に求めても, 手計算で求めてもよいが, 数値的に求める場合は用いた浮動小数点数を明記すること．

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

問題 8 (逆行列１)**.** 正則な行列 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ の逆行列 A^{-1} は, $AX = I$ の解 X のことである (ここで I は単位行列). $e_i \in \mathbb{R}^4$ を i 番目に 1 の要素をもち他が全てゼロであるベクトルとすると,

$$Ax_i = e_i$$

の解 x_i を並べた行列 $X = [x_1, x_2, \cdots, x_n]$ は A の逆行列である．問題 7 の行列 A の逆行列を, 次の方法でそれぞれ求めよ．いずれも 10 進 3 桁の浮動小数点数で表すこと．

(1) Cramer の公式
(2) Gauss の消去法

なお，数値計算の場合は，どちらの場合も自分でプログラムを作成すること．汎用ソフトウェアでは計算が最適化されており，結果が同じになる．

問題 9 (逆行列２)**.** 次の行列の逆行列を, 以下の方法で数値的に求めよ.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

ただし, いずれも 10 進 3 桁の浮動小数点数で表すこと．また, 用いた計算機の CPU と計算にかかった時間も明記すること.

(1) Cramer の公式
(2) Gauss の消去法

なお，数値計算の場合は，どちらの場合も自分でプログラムを作成すること．汎用ソフトウェアでは計算が最適化されており，結果が同じになる．

問題 9 は, 計算が終わらなかった場合, 計算機の CPU を明記し, 何時間かかって計算結果が得られなかったたか（あるいは何日かかったか）を記すこと.

問題 10 (解きにくい問題)**.** 次の方程式を考える.

$$\begin{aligned} Ax_i =& b_i,\ i = 1, 2 \\ A = \begin{bmatrix} 0.4 & 1.2 \\ 3.5 & 10.501 \end{bmatrix},\ b_1 =& \begin{bmatrix} 5.2 \\ 45.504 \end{bmatrix},\ b_2 = \begin{bmatrix} 5.2 \\ 45.501 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

この解は, それぞれ次で与えられる.

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix},\ x_2 = \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \end{bmatrix}$$

b の微小変動によって解が大きく異なるが, この原因を幾何学的に理解するため, 直線に幅を持たせた帯をそれぞれ次で表し, 帯の交差を図示せよ.

$$\begin{aligned} 0.4x + 1.2y =& 5.2 \pm 0.1 \\ 3.5x + 10.501y =& 45.504 \pm 0.003 \end{aligned}$$

2 つの連立一次方程式の解は, 2 本の直線の交点であるが, 丸め誤差のある場合には帯の交差する領域に解が存在する. x_2 が帯の交差領域に入っているかどうか確認せよ.

4　期末試験問題の作成

期末試験問題の一部を学生から募集する．各レポートで出題し，適当な基準のもとで採択する予定である．

問題 11 (問題作成)**.** 今回のレポートの範囲で，自分が教員の立場として期末試験に出したい問題，およびその解答例を作成せよ．計算問題でなくてもよい．その際，次の点に注意せよ．

- 15 分以内に解ける問題にすること．
- 計算が必要な場合，手計算で行える問題にすること．
- 自分が重要であると思う問題にすること．
- 法律や道徳に触れない問題にすること．（個人名が出てくる問題，誹謗・中傷するような問題，著作権（copy right マーク）のついている本に載っている問題をそのまま用いる，などはしない）

また，作成した問題の意図も述べること．例えば，基本的な知識である，教養として知っておくべきである，地頭の良さを見ることができる，など．

なお，この問題は，問題，解答例と作成意図が書いてあれば，どのような問題でも満点とする．また，試験に採用する場合は，一部を変更して出題する可能性がある．作成した問題の一部は，個人名を伏せて，演習問題などに利用させてもらうかもしれないので，その点は了承されたい．