- 必須：表紙をつけ，氏名，所属，学籍番号を明記すること．
- 必須：特に指定のない限り，A4 用紙で提出すること．
- 印刷の場合はなるべく両面印刷にすることを推奨する．
- 計算機で計算した場合，用いたプログラムをレポートには載せる必要はない．
- 問題に明らかな誤植がある場合は，訂正して解いてよい．ただし，訂正箇所と訂正後の文を明記すること．
- 解けない場合は，“問題の意味がなくならない程度”に，自分が解けるまで問題を易しく変更してよい．ただし，その旨を明記すること．その場合，作成した問題に応じて点数は割り引く．
- レポート課題は，複数人（学生，先輩，研究員など，誰でも可）で解いてもよい．研究は足りない部分を補って共同で行うことが多いので，課題を解くために複数人で解くことは構わない．
- 必須：複数人で解く場合，一緒に取り組んだ人の名前を記載すること（これは礼儀です）．名前を間違えた場合は，減点する．

1　代数方程式の解法

代数方程式の根を調べる問題に対し，Sturm の方法，DKA 法と呼ばれる数値計算法がある．

問題 1 (多項式の根)**.**

次の多項式を考える．

$$g(x) = x^5 - 34996x^4 - \frac{13999491}{100}x^3 - \frac{17814773}{100}x^2 - \frac{3972491}{50}x - 6300$$

(1) この多項式には，正の根が 1 つ存在することを示せ．

(2) Sturm の方法を用いて，正の根を求めよ．

問題 2 (DKA 法)**.**

次の多項式を考える．

$$f(x) = x^5 - 34996x^4 + \frac{13999491}{100}x^3 - \frac{17814773}{100}x^2 + \frac{3972491}{50}x - 6300$$

今度は，$f(x) = 0$ の全ての解を求めたい．以下に答えよ．

(1) Durand–Kerner–Aberth 法のアルゴリズムを示し，説明せよ．

(2) DKA 法を用いて，全ての根を求めよ．

2　固有値問題

問題 3 (べき乗法)**.**

次の行列の絶対値最大の固有値と，その固有ベクトルを，べき乗法で求めよ．

$$A = \begin{bmatrix} 16 & 2 & 3 & 13 \\ 5 & 11 & 10 & 8 \\ 9 & 7 & 6 & 12 \\ 4 & 14 & 15 & 1 \end{bmatrix}$$

得られた固有値，固有ベクトルは，10 進 3 桁の浮動小数点数表示で表すこと．

講義では実対称行列を対角化するアルゴリズムを考えたが，正規行列の場合も本質的には変わらない．$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ が正規行列とは，

$$AA^\top = A^\top A$$

を満たす行列のことをいう（複素行列の場合は転置を Hermite 共役に変えればよい）．正規行列はユニタリ行列で対角化可能であり，

$$P^* AP = \Lambda \quad \Leftrightarrow \quad AP = P\Lambda \tag{1}$$

の関係から，転置演算 $\top$ を Hermite 共役演算 $*$ に置き換えることで，Jacobi 法や 3 重対角化を用いた方法などを応用して固有値を求めることが可能である．

任意の実行列 A は，ある対称行列 B と歪対称行列 C の組を用いて $A = B + C$ で表せるので，A が正規行列の条件は $BC = CB$ と同値である．したがって，対称行列部分 B を直交行列 $P_{\mathrm{sym}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ で対角化すると，

$$P_{\mathrm{sym}}^\top AP_{\mathrm{sym}} = \Lambda_B + P_{\mathrm{sym}}^\top CP_{\mathrm{sym}}$$

を得る．ここでうまく P_{sym} を選ぶと，$P_{\mathrm{sym}}^\top AP_{\mathrm{sym}}$ はサイズが 2 以下のブロック対角行列となり，とくにサイズが 2 の i 番目のブロック行列 D_i では

$$D_i := \begin{bmatrix} a_i & -b_i \\ b_i & a_i \end{bmatrix} = a_i \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b_i \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad a_i, b_i \in \mathbb{R}$$

と表せる．この行列の固有値が $a \pm \mathrm{i}b$，$\mathrm{i} := \sqrt{-1}$ となることに注意すると，対称ではない正規行列の固有値問題は，この行列の対角化に帰着される（行列の右下の要素を $c \neq a$ とすると正規行列にならない）．

$$P_{\mathrm{sym}}^\top AP_{\mathrm{sym}} = \mathrm{diag}[D_1,\ D_2,\ \cdots,\ D_m, a_{2m+1},\ \cdots,\ a_n]$$

各 D_i の対角化は，歪対称行列の対角化のみを考えればよいので，

$$P_{\mathrm{asym}} = \mathrm{diag}[\underbrace{Q,\ Q,\ \cdots,\ Q}_{m\text{-個}},\quad \underbrace{1,\ \cdots 1}_{n-2m\ \text{個}}\ ], \quad Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 1 \end{bmatrix}$$

とすると，結局

$$P_{\mathrm{asym}}^* P_{\mathrm{sym}}^\top AP_{\mathrm{sym}} P_{\mathrm{asym}} = \mathrm{diag}[a_1 - \mathrm{i}b_1,\ a_1 + \mathrm{i}b_1,\ \cdots, a_m - \mathrm{i}b_m,\ a_m + \mathrm{i}b_m,\ a_{m+1},\ \cdots, a_n] \tag{2}$$

を得る．

このことを念頭にし，正規行列の固有値問題を考えよう．800×800 の実正規行列の固有値問題を考える．解くべき行列 $A \in \mathbb{R}^{800\times 800}$ は，次の URL からダウンロードして用いること．

`http://www.bode.amp.i.kyoto-u.ac.jp/member/ohki/lec/num_analysis/doc/data1.zip`

ファイルは Matlab のデータ形式 (`data_mat.mat`)，Scilab のデータ形式 (`data_scilab.sod`)，Excel のデータ形式（csv 形式）(`data_excel.csv`) で用意しているので，いずれかを利用すること．全てのファイルは同一のデータが入っている．

問題 4 (固有値問題)**.**

上のデータファイルの固有値問題を考える．ただし，固有値は複素数も含まれるため，講義で扱った内容をそのまま用いても解けない．上で挙げた方法や参考文献を調べ，自分なりに解くこと．

(1) Jacobi 法を用いて固有値を求め，複素平面にプロットせよ．$\epsilon > 0$ を設定し，アルゴリズムの収束は非対角要素の二乗和が，ϵ 未満になったら打ち切ること．定めた ϵ も明記すること．
(2) 丸め誤差の影響を考慮したい．10 進 3 桁の浮動小数点表示を用いる場合，Jacobi 法で求めた固有値を複素平面にプロットし，とくに浮動小数点数を気にせず計算した（１）の結果と比較して，違いが出るか否か確認せよ．また，違いが出た場合，得られた固有値が信頼できるかどうか述べよ．（重複している，原点に近いなどの特徴を調べること）

固有値問題の正解を知りたければ，Scilab ならば “spec”，Matlab ならば “eig” を用いることができる．作ったプログラムが正しく動いているかどうか，これら既存手法を用いて確認することができる．

3　最小二乗法

最小二乗法の応用例として，次の差分方程式のパラメータを求める問題を考えよう．

$$y[k] = -a_1 y[k-1] - a_2 y[k-2] - a_3 y[3] + b_0 u[k] + b_1 u[k-1] + b_2 u[k-2] \tag{3}$$

これは，u を知ることのできない雑音としたとき移動平均モデル (Auto-Regression Moving Average model, ARMA model)，u をこちらが調整可能な制御入力としたとき ARX モデル (Auto-Regression eXternal input model) と呼ばれ，それぞれ時系列解析やシステム同定，制御といった分野で現れる基本的な方程式の 1 つである．株価の時系列モデルや信号の入出力関係を導くために必要な方程式である．

モデルを立てる際，式 (3) の信号の係数を決めなければならない．これをデータから決定しよう．ここでは y と u が測定できるとする．$k_0 \geq 4$ として十分大きな N までデータをもっている状況を考え，

$$Y_{k_0+1:N-k_0} := \begin{bmatrix} y[k_0+1] \\ y[k_0+2] \\ \vdots \\ y[N-k_0] \end{bmatrix},$$

$$X_{k_0+1:N-k_0} := \begin{bmatrix} -y[k_0] & -y[k_0-1] & -y[k_0-2] & u[k_0+1] & u[k_0] & u[k_0-1] \\ -y[k_0+1] & -y[k_0] & -y[k_0-1] & u[k_0+2] & u[k_0+1] & u[k_0] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -y[N-k_0-1] & -y[N-k_0-2] & -y[N-k_0-3] & u[N-k_0] & u[N-k_0-1] & u[N-k_0-2] \end{bmatrix},$$

とおくと，式 (3) は次のように書きなおせる．

$$Y_{k_0+1:N-k_0} = X_{k_0+1:N-k_0} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \tag{4}$$

これは正規方程式（normal equation），あるいは Yule–Walker 方程式と呼ばれ，時系列解析の様々な場面で現れる方程式である．

この Yule–Walker 方程式 (4) を解きたい．データは下記アドレスに u と y のデータを入れてあるので，利用すること．

`http://www.bode.amp.i.kyoto-u.ac.jp/member/ohki/lec/num_analysis/doc/data2.zip`

ファイルは Matlab のデータ形式 (`data2_mat.mat`)，Scilab のデータ形式 (`data2_scilab.sod`)，Excel のデータ形式（csv 形式）(`data2_excel.csv`) で用意しているので，いずれかを利用すること．全てのファイルは同一のデータが入っている．Excel ファイルは，1 列目が y の時系列データで，2 列目が u の時系列データである．

問題 5 (正規方程式)**.**

(1) 式 (4) が解けるための必要十分条件を示せ．

(2) 差分方程式 (3) のパラメータを，最小二乗法により求めよ．

(3) 得られたパラメータと入力データを用いて，出力 y にどれだけ近い振る舞いをするか，プロットして確かめよ．プロットは，全てのデータを用いると違いが分からなくなるため，範囲を適当に定めること．

4　その他

問題 6 (疎行列の連立一次方程式)**.**

連立一次方程式 $Ax = b$ を再び取り上げる．ここで A は，

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

b は必要に応じて異なるベクトルが与えられる場合，A の LU 分解，あるいは逆行列を求めておき，それを b に乗じれば x が求まる．以下の問に答えよ．

(1) A の LU 分解を求めよ．

(2) A^{-1} を求めよ．

(3) LU 分解と逆行列を求めるのとでは，計算量的にどちらが得か？理由をつけて答えよ．（ヒント：0 には何をかけても 0 なので，行列 G, H の掛け算 GH において，0 の掛け算および足し算は計算する必要がない．）

問題 7 (非線形方程式)**.**

次の方程式の解の近似値を求める方法を示し，実際に解の近似値を求めよ．反復法の場合は計算を途中で打ち切る必要があるが，打ち切る判断基準があれば記すこと．

(1) $x^3 = 2,\ x > 0.$

(2) $x^x = 2$

問題 8 (解きにくい方程式)**.**
　ある非線形方程式 $f(x) = 0$ の解を求めるために，Newton 法を用いる．Newton 法でも解きにくい関数が存在するが，そのような関数 f の何が問題で解きにくいか，述べよ．

問題 9 (アルゴリズムの収束)**.**

(1) 非線形方程式に対する縮小写像の定義を書け．
(2) 次の写像 ϕ が区間 $[\pi/6, \pi/3]$ 上の縮小写像であることを示せ．

$$\phi(x) = \cos x.$$

(3) 方程式

$$x = \cos x$$

の近似解を求めるための反復法を 1 つ書き，その反復法が厳密解に収束するための初期値の範囲を求めよ．

問題 10 (連立一次方程式の応用)**.**
　身近な問題で連立一次方程式

$$Ax = b$$

で表せる問題を探し，解け．ここで "表せる" とは，"近似的に表せる" と捉えてよい．その問題を解くと，何が分かるのかも述べよ．