数値計算 参考問題（解答例（一部修正 7/16）付き）

対象：計算機科学コース・ソフトウェア科学コース・数理科学コース

担当教員：大木 健太郎

2015 年 7 月 23 日 (木曜日 5 時限)

試験本番での注意（予定）

- 電卓および電卓機能を有する携帯電話の持ち込み可（PC やタブレット端末等は不可）.
- 教科書・ノート等の持ち込みは一切不可.
- 電卓機能以外の携帯端末等の利用は不可（とくにネットワーク機能は不可）.
- 試験中であっても教員が許可しないものは使用不可とし，試験終了時刻まで没収する.
- その他，私語など通常の試験で禁止されていることは禁止.

1. ２つの連立一次方程式を考える.

$$A_1x = b, \quad A_2x = b$$

ただし，

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1.001 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 10^{-6} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

とする．このとき，以下の問に答えよ.

(a) 行列 A_1，A_2 の条件数を求めよ．ただし，行列のノルムは，Euclid ノルムの誘導ノルムとする．解は 10 進 3 桁の浮動小数点数で表すこと.（計算過程を 10 進 3 桁の浮動小数点数で行う必要はない）

(b) どちらの行列を用いたほうが解きやすいか，理由をつけて答えよ.

(c) 行列 A_1 を，次の行列を用いて相似変換する.

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

新たな行列 $\tilde{A}_1 = CA_1C^{-1}$ を求め，

$$\begin{aligned} \tilde{A}_1 y &= Cb \\ Cx &= y \end{aligned}$$

から x を求めよ．ただし，解は 10 進 3 桁の浮動小数点数で表すこと.（計算過程を 10 進 3 桁の浮動小数点数で行う必要はない）

(d) 相似変換した行列 $\tilde{A}_1$ による連立一次方程式と，相似変換する前の連立一次方程式では，どちらが計算精度が高いと考えられるか，理由をつけて述べよ．

2. Riccati 代数方程式と呼ばれる，次の非線形行列方程式を考える．

$$AX + XA^\top - XQX + I = 0 \tag{1}$$

ただし，

$$A := \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad Q := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

であり，I は単位行列である．また，$A^\top$ は行列 A の転置を意味する．このとき，以下の問に答えよ．

(a) この問題の場合，解は対称行列で与えられることが知られている．X と x をそれぞれ

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_3 \\ x_3 & x_2 \end{bmatrix}, \quad x := \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^\top, \quad x_i \in \mathbb{R},$$

とおき，問題 (1) を次の連立代数方程式を解く問題に帰着させたい．

$$f(x) := \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ f_3(x) \end{bmatrix} = 0$$

各関数 f_i を求めよ．

(b) 初期値を $x = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^\top$ とし，Newton 法を用いて 2 ステップ計算せよ．解は 10 進 3 桁の浮動小数点数で表示すること．(計算過程では必要ない)

(c) ベクトルに直さず，行列方程式のまま Newton 法を適用したい．次の手順で，Newton 法を求めよ．

i. $F : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ を，

$$F(X) := AX + XA^\top - XQX + I$$

と定める．また，$Y = Y^\top \in \mathbb{R}^\top$ とする．このとき，F の X における Y–方向微分

$$L_X(Y) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{F(X + \epsilon Y) - F(X)}{\epsilon}$$

を求めよ．また，これは Y についての線形写像になっていることを確認せよ．

ii. Newton 法は，$X = X^{(k)}$，$Y = X^{(k+1)} - X^{(k)}$ とおき，

$$F(X^{(k)}) + L_{X^{(k)}}(X^{(k+1)} - X^{(k)}) = 0$$

を計算することで得られる．

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} - L^{-1}_{X^{(k)}}\left(F(X^{(k)})\right)$$

$L_X(Y) = M$ の逆写像 $L_X^{-1}(M)$ をどのようにして求めればよいか，示せ．

3. 対称行列の固有値問題の解法として，Jacobi 法が知られている．

(a) p, q 行および p, q 列に対して回転操作を与える行列

$$P = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \cos(\phi) & \cdots & \sin(\phi) & & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ & & -\sin(\phi) & \cdots & \cos(\phi) & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

を用いて，$A \mapsto P^\top AP$ により $(P^\top AP)_{pq} = (P^\top AP)_{qp} = 0$ となるよう，ϕ を選ぶことができる．(p, q) を変えてこの操作を繰り返すことで，A を対角化する方法が，Jacobi 法である．Jacobi 法で対角化できることを証明せよ．

(b) 次の行列 A を Jacobi 法を用いて対角化したい．

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

収束速度が最大になるよう (p, q) を選び，$A^{(0)} = A$ とし，2 ステップ後の $A^{(2)}$ を求めよ．計算は，10 進 3 桁以上の浮動小数点数で行い，解は 10 進 3 桁の浮動小数点数で表すこと．

(c) 収束速度が最大になるように (p, q) を選んだとき，Jacobi 法は 1 次収束であることを示せ．

4. 次の中から 1 つ選び，回答せよ．

(a) 1 変数の場合の Newton 法のアルゴリズムを示し，そのアルゴリズムを説明せよ．

(b) 反復法の収束を解析的に評価するために，縮小写像の原理が用いられることが多い．縮小写像の原理について述べよ．

(c) Gauss–Seidel 法について，そのアルゴリズムを導出せよ．

(d) 代数連立方程式における DKA 法について述べよ．

(e) n 次元実対称行列を 3 重対角化するアルゴリズムを 1 つ挙げ，その原理を説明せよ．

解答例

1. (a) Euclid ノルムを用いたときの行列 A の条件数 $\kappa(A)$ とは，$A^\top A$ の最大固有値の平方根と，最小固有値の平方根の逆数との積である．とくに対称行列の場合は，特異値は行列の固有値の “絶対値” と一致するので，A_1 の場合は固有値を計算すればよい．$\epsilon = 0.001$ とおくと，

$$\det(\lambda I - A_1) = \lambda^2 - (2+\epsilon)\lambda + \epsilon = 0$$

より，

$$\begin{aligned}\lambda_{A_1\pm} &= \frac{1}{2}\left(2+\epsilon \pm \sqrt{4+\epsilon^2}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left\{2+\epsilon \pm 2\right\}\end{aligned}$$

である．これより，

$$\kappa(A_1) \simeq \frac{2+\frac{1}{2}\epsilon}{\frac{1}{2}\epsilon} = \frac{4+\epsilon}{\epsilon} = 4.001\times 10^3 \simeq 4.00\times 10^3$$

となる．次に $\kappa(A_2)$ を求めよう．A_2 は対称行列ではないので，定義通りに計算する．

$$\det(\sigma I - A_2^\top A_2) = \sigma^2 - (2+\epsilon^4)\sigma + \epsilon^4 = 0$$

より，

$$\sigma_{A_2\pm} = \begin{cases} 2, \\ \epsilon^4 \end{cases}$$

よって，

$$\kappa(A_2) = \sqrt{\frac{2}{\epsilon^4}} = \frac{\sqrt{2}}{\epsilon^2} \simeq 1.41\times 10^6$$

(b) 条件数は悪いが，A_2 を用いた連立一次方程式のほうが解きやすい．連立一次方程式の解を求める問題は，直線の交点を求める問題であるが，$A_1 x = b$ で表現される 2 つの直線の方が，より並行になっているため，数値誤差の影響を受けやすい．ただし，この問題の設定に限れば，例えば 10 進数で計算したときは，どちらも難しさは変わらない．b が厳密には浮動小数点数表示で表せない場合に，大きく解が異なりやすいのは，A_1 を用いた場合である．

(c) 相似変換後の行列は，

$$\tilde{A}_1 = \begin{bmatrix} 0.001 & 0.001 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad Cb = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

である．これより，

$$y = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

を得る．さらに，$Cx = y$ より，

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

を得る．

2. (a) X を式 (1) へ代入して整理すると,

$$\begin{bmatrix} -4x_1+2x_3+1 & x_2-3x_3 \\ x_2-3x_3 & -x_2^2-2x_2+1 \end{bmatrix} =: \begin{bmatrix} f_1(x) & f_3(x) \\ f_3(x) & f_2(x) \end{bmatrix} = 0$$

すなわち,

$$f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ f_3(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4x_1+2x_3+1 \\ -x_2^2-2x_2+1 \\ x_2-3x_3 \end{bmatrix}$$

を得る.

(b) Newton 法のアルゴリズムは,

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - J(x^{(k)})^{-1} f(x^{(k)}), \quad J(x) := \frac{\partial f(x)}{\partial x^\top}$$

である. 先程求めた f を具体的に代入すれば,

$$J(x) = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 0 & -2(x_2+1) & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

となり, $\det(J(x)) = -24(x_2+1)$ なので, $x_2 \neq -1$ 以外では正則な行列になる. 正則性の仮定の下で, $J(x)^{-1}$ は,

$$\begin{aligned} J(x)^{-1} =& \frac{1}{\det(J(x))} \begin{bmatrix} 6(x_2+1) & 2 & 4(x_2+1) \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 4 & 8(x_2+1) \end{bmatrix} \\ =& \frac{-1}{12(x_2+1)} \begin{bmatrix} 3(x_2+1) & 1 & 2(x_2+1) \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 4(x_2+1) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

となる.

以上で計算の準備が整った. 最初のステップは,

$$J(x^{(0)})^{-1} = \frac{-1}{24} \begin{bmatrix} 6 & 1 & 4 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 8 \end{bmatrix}, \quad f(x^{(0)}) = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

より,

$$x^{(1)} = x^{(0)} - J(x^{(0)})^{-1} f(x^{(0)}) = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

次のステップは,

$$J(x^{(1)})^{-1} \simeq \begin{bmatrix} -0.25 & -0.0417 & -0.1667 \\ 0 & -0.25 & 0 \\ 0 & -0.0833 & -0.3333 \end{bmatrix}, \quad f(x^{(1)}) = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

より，

$$x^{(2)} = x^{(1)} - J(x^{(1)})^{-1} f(x^{(1)}) \simeq \begin{bmatrix} 0.3194 \\ 0.4167 \\ 0.1389 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 0.319 \\ 0.417 \\ 0.139 \end{bmatrix}$$

を得る．

(補足) この問題は，非線形な方程式が x_2 のみに限られているので，解析的に解を求められる．

$$x_1 = \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}x_2 + 1\right),\ x_2 = -1 \pm \sqrt{2},\ x_3 = \frac{1}{3}x_2$$

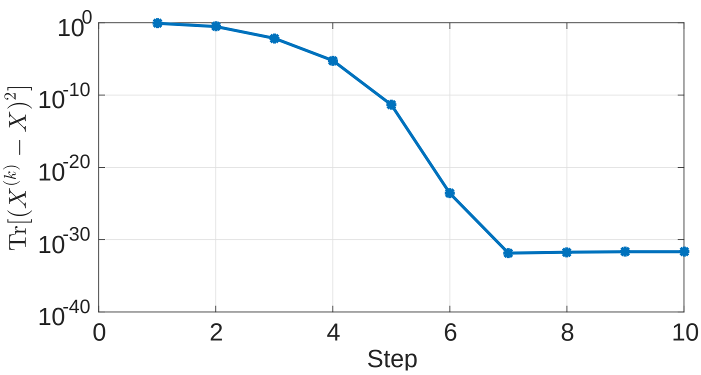
問題の設定では，正定値行列が得られるので，$x_2 = -1 + \sqrt{2}$ の場合が解になる．このとき，Riccati 方程式の解は

$$X^* = \begin{bmatrix} 0.3190 & 0.1381 \\ 0.1381 & 0.4142 \end{bmatrix}$$

となる（10 進 4 桁の浮動小数点数で表示）．2 つのステップでも，かなり近い値が得られており，

$$x^{(3)} \simeq \begin{bmatrix} 0.3194 \\ 0.4142 \\ 0.1387 \end{bmatrix},\quad x^{(4)} \simeq \begin{bmatrix} 0.3190 \\ 0.4142 \\ 0.1381 \end{bmatrix}$$

であり，非常に速く収束することがわかる．真値との誤差を，各行列要素の二乗和で定義し，10 ステップまで計算した数値結果を，片対数グラフとして図 2b に示す．



(c) i. 定義どおりに計算する．

$$F(X + \epsilon Y) - F(X) = \epsilon\left\{(A - XQ)Y + Y(A - XQ)^\top\right\} - \epsilon^2 YQY$$

であるので，

$$L_X(Y) = (A - XQ)Y + Y(A - XQ)^\top$$

を得る．また，任意の $Y_1, Y_2 \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ および $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ に対して

$$L_X(\alpha Y_1 + \beta Y_2) = \alpha L_X(Y_1) + \beta L_X(Y_2)$$

が成り立つので，L_X は線形写像である．

(行列の微分に関する補足) この問題で用いた，行列から行列への関数の微分は，Gateau 微分，Frechet 微分という関数解析で用いられる微分概念を用いている．これらは変分法の数学的基礎であり，物理学や最適化問題などの様々な場面で現れる．関数の微分とは，その接線における直線を求めていることになるので，局所的な線形方程式化を意味している．

線形写像で表しているので，初見ではわかりにくいかもしれない．そこで，対応関係をみるために，関数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ の点 x における Taylor 展開を考えると，

$$f(x+\delta x) - f(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \delta x_i + \cdots$$

は，δx を $y \in \mathbb{R}^n$ と任意の（微小な）$\epsilon > 0$ で $\delta x = \epsilon y$ と置き直せば，

$$f(x+\epsilon y) - f(x) = f(x) + \epsilon \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} y_i}_{=:L_x(y)} + \cdots$$

である．この線形写像 $L_x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ が，単純な行列（微係数）とベクトルの掛け算に置き換えられるので，ベクトル値関数を考える場合は微係数のみを考えればよい．行列の掛け算が，線形写像となっていることが，ここでは重要.

ii. 求めなければならない問題は,

$$L_X(Y) = -F(X)$$

から Y を求める方法を導くことである．L_X が線形写像であることから，連立一次方程式の応用であることに気がつけば早い．$F(X)$ は，持っている情報からすぐに計算できるため，与えられているものとして計算すると，結局

$$BY + YB^\top = M, \quad B := (A - XQ),\ M := -F(X)$$

という方程式（Lyapunov 方程式）を解けばよいことになる．Y と M が対称行列であることに注意して，それぞれ次のようにパラメータ化する．

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 & y_3 \\ y_3 & y_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} m_1 & m_3 \\ m_3 & m_2 \end{bmatrix}$$

ここで

$$\begin{aligned} BY + YB^\top &= \begin{bmatrix} 2b_1y_1 + 2b_2y_3 & b_3y_1 + b_2y_2 + (b_1+b_4)y_3 \\ b_3y_1 + b_2y_2 + (b_1+b_4)y_3 & b_4y_2 + b_3y_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} m_1 & m_3 \\ m_3 & m_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

より，次の連立一次方程式の問題へと帰着できる．

$$\begin{bmatrix} 2b_1 & 0 & 2b_2 \\ 0 & 2b_4 & 2b_3 \\ b_3 & b_2 & b_1+b_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix}$$

これを，例えば Gauss の消去法で解けば，$Y = L_X^{-1}(M)$ を求められる．

3. TBA（とくに捻った問題ではないので，教科書，web スライド，講義ノートなどを見て解いてください）

4. (a) Newton 法とは，$f(x) = 0$ の解を，次の反復アルゴリズムによって解く手法である．

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}$$

ここで $f' = \frac{\partial f}{\partial x}$ である．各ステップ k において，点 $(x^{(k)}, f(x^{(k)}))$ から関数 f の接線を引き，その直線が 0 と交わるところを新たな更新値 $x^{(k+1)}$ として採用することで，解を探索する収束させるアルゴリズムである．

(b) ベクトル空間 X において，ノルム $\|\bullet\|$ が定められているとする．X の閉領域 U において関数 ϕ が縮小写像とは，次の二つが成り立つときをいう．

- 任意の $x \in U$ に対して $\phi(x) \in U$,
- 任意の $x, y \in U$ に対して，$\|\phi(x) - \phi(y)\| \leq q\|x - y\|$ を満たす $q \in [0, 1)$ が存在する

このとき，$x^{(k+1)} = \phi(x^{(k)})$ で記述されるアルゴリズムは，U 内に $x = \phi(x)$ を満たす唯一解を持つ．そのため，与えられた閉領域 U において ϕ が縮小写像であることが示せれば，反復法による数値計算結果が真値に収束する．

(c) Gauss–Seidel 法とは，連立一次方程式 $Ax = b$ を解く反復法の 1 つである．A を対角成分，下三角成分，上三角成分に分解すると，

$$A = D + E + F$$

となるので，連立一次方程式を

$$Ax = b \quad \Longrightarrow \quad Dx = b - (E + F)x$$

に分解できる．ここで左辺の x を更新値 $x^{(k+1)}$，右辺の x を現在の推定値 $x^{(k)}$ とすると，

$$x^{(k+1)} = D^{-1}\left\{b - (E + F)x^{(k)}\right\}$$

が得られる．ここでアルゴリズムを細かく見てみると，j 番目の要素の更新は

$$x_j^{(k+1)} = a_{jj}^{-1}\left\{b_j - \sum_{i=1}^{j-1} a_{j,i}x_i^{(k)} - \sum_{i=j+1}^{n} a_{j,i}x_i^{(k)}\right\}$$

であり，右辺の $x_i^{(k)}, i < j$ ではすでに更新した値を用いることができる．そこで

$$x_j^{(k+1)} = a_{jj}^{-1}\left\{b_j - \sum_{i=1}^{j-1} a_{j,i}x_i^{(k+1)} - \sum_{i=j+1}^{n} a_{j,i}x_i^{(k)}\right\}$$

と書き直し，行列の形で整理すると，

$$x^{(k+1)} = -(D+E)^{-1}Fx^{(k)} + (D+E)^{-1}b$$

を得る．この更新則にしたがって値を更新する方法が，Gauss–Seidel 法である

(d) DKA 法とは，重複しない代数方程式の全ての根を求めるアルゴリズムの１つで，初期値を代数方程式の根を全て含む複素平面の円周上に，実軸に置かないように配置すれば，数値誤差のない限り，必ず真値へと収束する．収束は真値の周辺で二次収束であり，遠くに配置されても一次収束が保証されている．具体的なアルゴリズムは Newton 法の変形であり，

$$\begin{aligned} p_n(z) =& a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}z + a_n \\ =& a_0(z-\alpha_1)\cdots(z-\alpha_n) \end{aligned}$$

なる多項式の根 $\alpha_i,\ i=1,2,\cdots,n$ を知りたい場合，Newton 法では p_n の一階微分 p_n' を用いて

$$z_i^{(k+1)} = z_i^{(k)} + \frac{p_n(z_i^{(k)})}{p_n'(z_i^{(k)})}, \quad i=1,2,\cdots,n$$

とするが，分母の $p_n'(z_i^{(k)})$ の各根 α_j に近似値 $z_j^{(k)}$ を代入して，

$$z_i^{(k+1)} = z_i^{(k)} + \frac{p_n(z_i^{(k)})}{a_0\prod_{j=1,j\neq i}^{n}(z_i^{(k)} - z_j^{(k)})}, \quad i=1,2,\cdots,n$$

としたものが DK 法（Duand–Kerner method）である．これに初期値の配置を前述の通りに工夫したものが，DKA 法（Durand–Kerner–Aberth method）である．初期値配置は，具体的には次のようになる．

$$z_i^{(0)} = -\frac{a_1}{n} + r_0 \exp\left(\sqrt{-1}\left(\frac{2(i-1)\pi}{n} + \frac{\pi}{2n}\right)\right), \quad i=1,2,\cdots,n$$

ただし，r_0 は p_n の全ての根を含む円の半径である．

(e) 講義では， Householder 法と Lanczos 法を紹介した．ここでは Householder 法を説明する．Householder 法とは，基本直交行列と呼ばれる直交行列を両側からかけることで，実対称行列を三重対角化する手法である．$x, y \in \mathbb{R}^n$ を互いに異なる 0 でないベクトルとし，

$$u := \frac{x-y}{\|x-y\|_2}$$

と定めると，$P := I - uu^\top$ は実直交行列になり，

$$Px = y$$

を満たす．ただし，I は単位行列である．この性質を利用し，実対称行列 $A=(a_{ij})$ に対し，

$$x = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} \frac{a_{11}}{\sqrt{\sum_{i=2}^n a_{i1}^2}} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

として $u=(x-y)/\|x-y\|_2$, $P_1=I-uu^\top$ とすると，

$$A^{(2)}=P_1AP_1^\top=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21}^{(2)} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21}^{(2)} & a_{22}^{(2)} & * & \cdots & a_{n2}^{(2)} \\ 0 & * & \ddots & & * \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & * & \cdots & a_{nn}^{(2)} \end{bmatrix}$$

となる．次に

$$x=\begin{bmatrix} a_{21}^{(2)} \\ a_{22}^{(2)} \\ \vdots \\ a_{n2}^{(2)} \end{bmatrix}, \quad y=\begin{bmatrix} a_{21}^{(2)} \\ a_{22}^{(2)} \\ \sqrt{\sum_{i=3}^{n}(a_{i2}^{(2)})^2} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

として $u=(x-y)/\|x-y\|_2$, $P_1=I-uu^\top$ とすると，

$$A^{(3)}=P_2A^{(2)}P_2^\top=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21}^{(2)} & 0 & & \cdots & 0 \\ a_{21}^{(2)} & a_{22}^{(2)} & a_{32}^{(3)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{32}^{(3)} & \ddots & & & * \\ \vdots & 0 & & & & \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & * & & \cdots & a_{nn}^{(2)} \end{bmatrix}$$

となる．これを順次繰り返していくと，三重対角成分以外はゼロになり，有限回の演算 ($n-2$ 回) で三重対角化が可能である．