システム工学実験
パラメータ推定手順
2021年度

大木 健太郎

2021年4月7日 修正/加筆

アウトライン

1. 線形システムと周波数情報
2. パラメータ推定
3. 実際の手順

線形時不変システムと伝達関数

入力と出力の関係が線形な定係数微分方程式で与えられるとき，
この方程式を線形時不変システムという

$$
\begin{aligned}
&\frac{d^n}{dt^n}y(t) + a_1\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y(t) + \cdots + a_n y(t) \\
=&b_0\frac{d^m}{dt^m}u(t) + b_1\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}u(t) + \cdots + b_m u(t)
\end{aligned}
$$

Laplace 変換： $\mathcal{L}(f(t)) := \int_0^\infty f(t)e^{st}dt$

等価な表現

$$
\begin{aligned}
&\left(s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n\right)Y(s) \\
=&\left(b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_m\right)U(s) \\
&+ \left(\text{polynomials of } s \text{ with initial values}\right)
\end{aligned}
$$

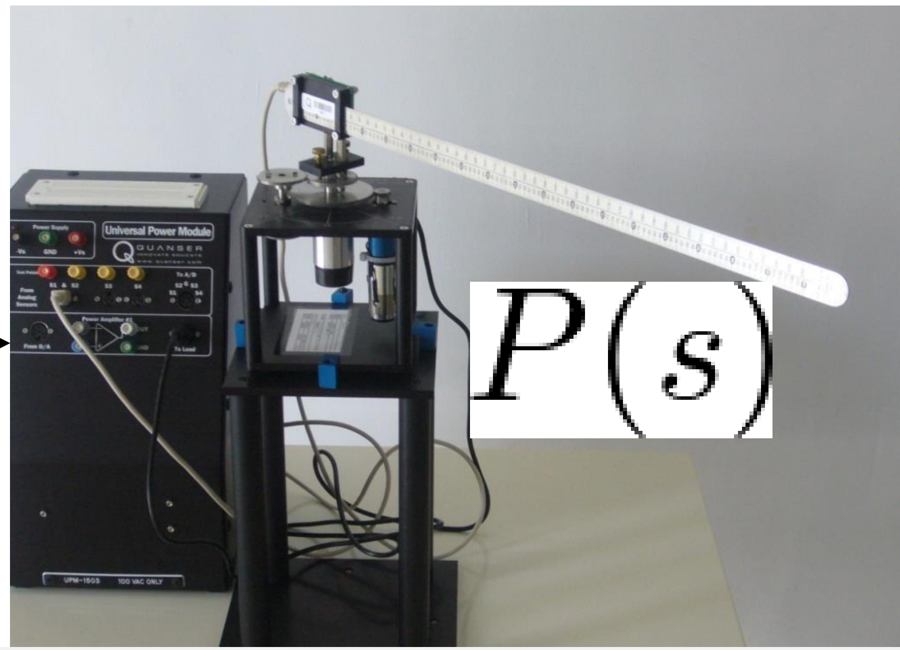
$$Y(s) := \mathcal{L}(y(t)),\ U(s) := \mathcal{L}(u(t))$$

周波数領域での入出力表現

$$Y(s) = P(s)U(s) + F(s)$$

伝達関数　　初期値応答

入力
$U(s)$



出力
$Y(s)$

- ✓ 入出力関係は，伝達関数で記述される
- ✓ 出力は，伝達関数と入力信号の積で決まる

伝達関数から分かる情報

- **安定性**：（有理）伝達関数の極の実部が負ならば，安定
  - ✓入力がない場合，任意の初期値に対して出力がゼロになる
- **周波数情報**（安定な場合）

$$P(s) = \frac{5}{2+s}$$

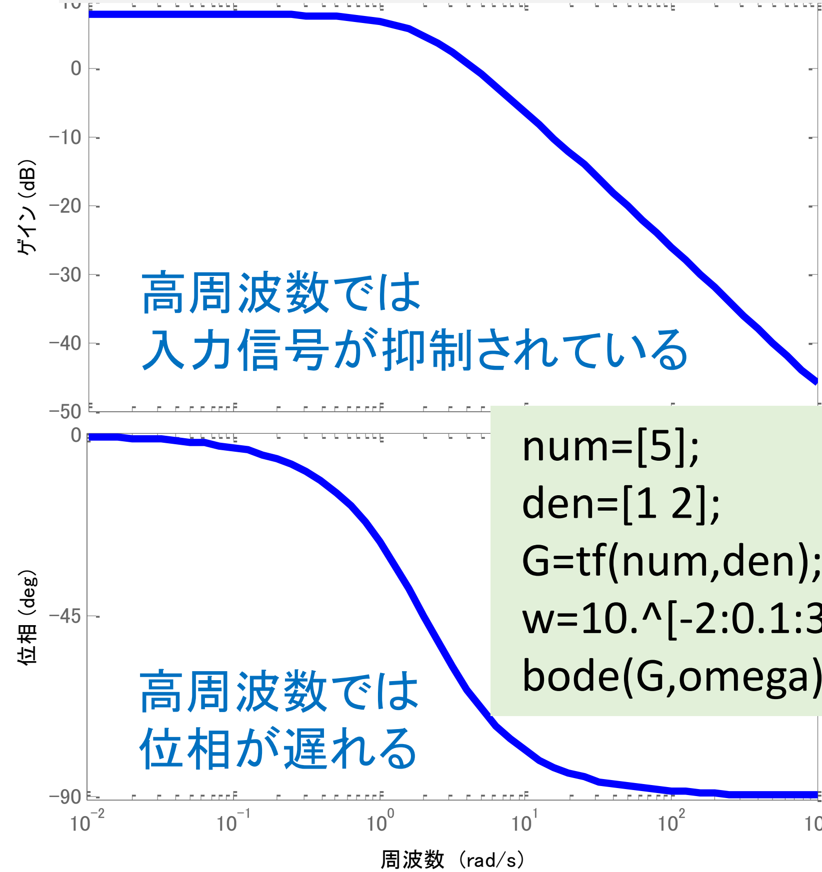
$$P(j\omega) = \frac{5(2-j\omega)}{4+\omega^2}$$

$$= \left|\frac{5}{\sqrt{4+\omega^2}}\right| \frac{2-j\omega}{\sqrt{4+\omega^2}}$$

$$= \underbrace{\left|\frac{5}{\sqrt{4+\omega^2}}\right|}_{\text{ゲイン}} e^{j\angle P(j\omega)}$$

位相：$\angle P(j\omega) := -\arctan\left(\frac{\omega}{2}\right)$

Bode 線図（ゲインと位相の対数グラフ）




```
num=[5];
den=[1 2];
G=tf(num,den);
w=10.^[-2:0.1:3];
bode(G,omega)
```

線形システムの特徴

- 入出力関係の周波数は同じ

$$u(t) = \sin(\omega t) \mapsto y(t) = |P(j\omega)| \sin(\omega t + \angle P(j\omega))$$

- 線形システムは重ね合わせの原理が成り立つ

$$u(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i \sin(\omega_i t + \phi_i)$$

【安定な場合】

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} |P(j\omega_i)| f_i \sin(\omega_i t + \phi_i + \angle P(j\omega_i))$$

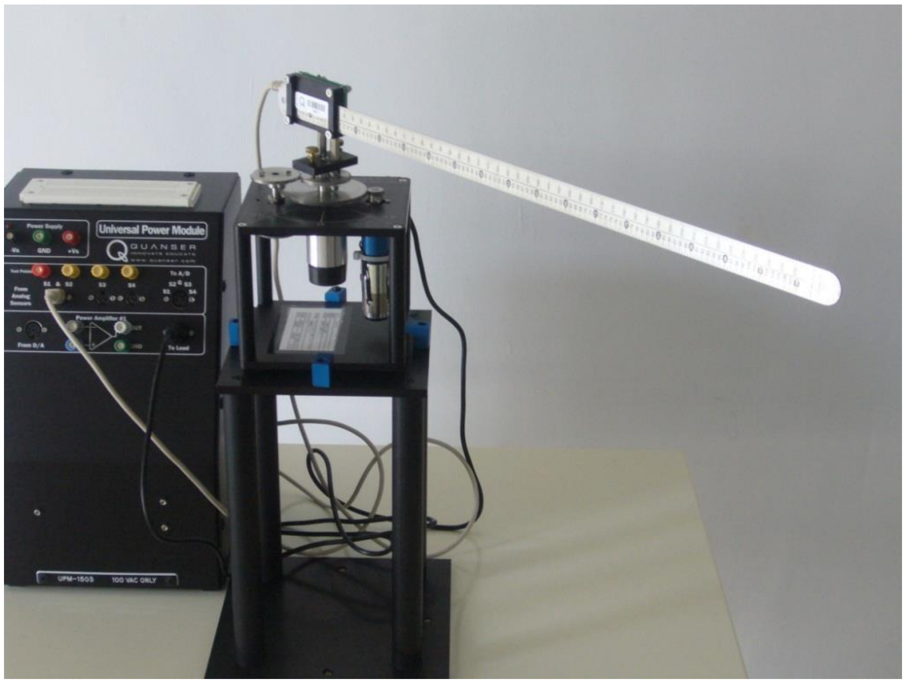
- 安定な線形システムならば，周波数情報からシステムが推定できる

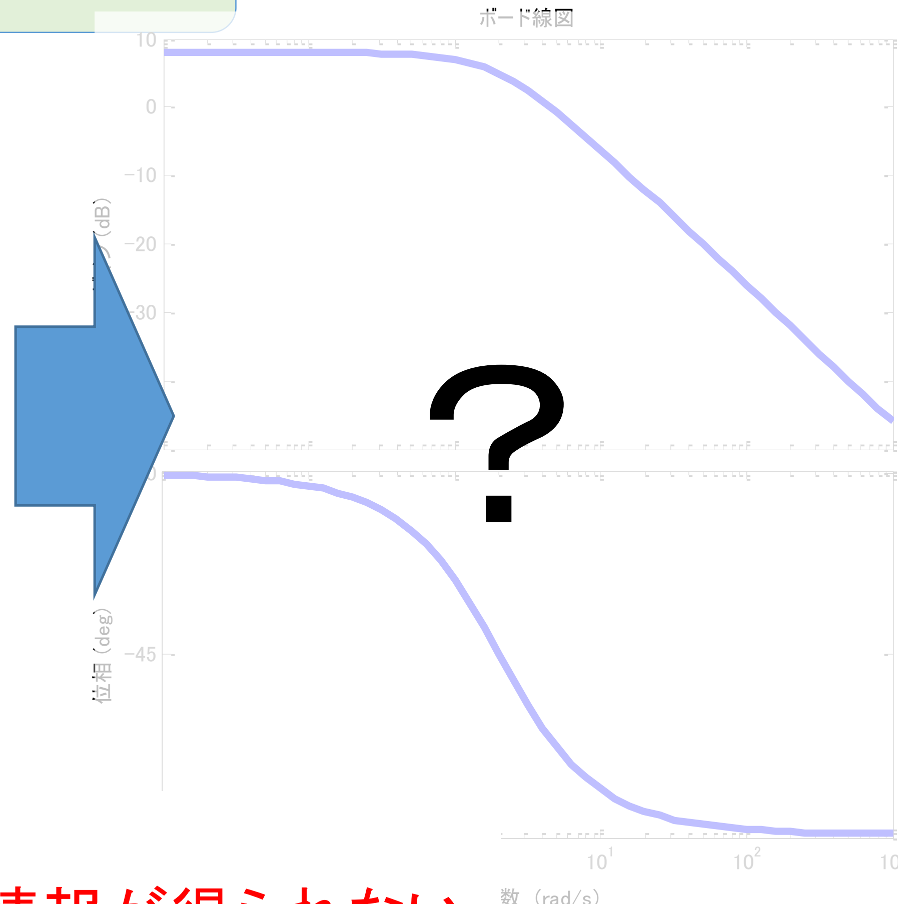
アウトライン

1. 線形システムと周波数情報
2. パラメータ推定
3. 実際の手順

周波数情報から線形システムの復元

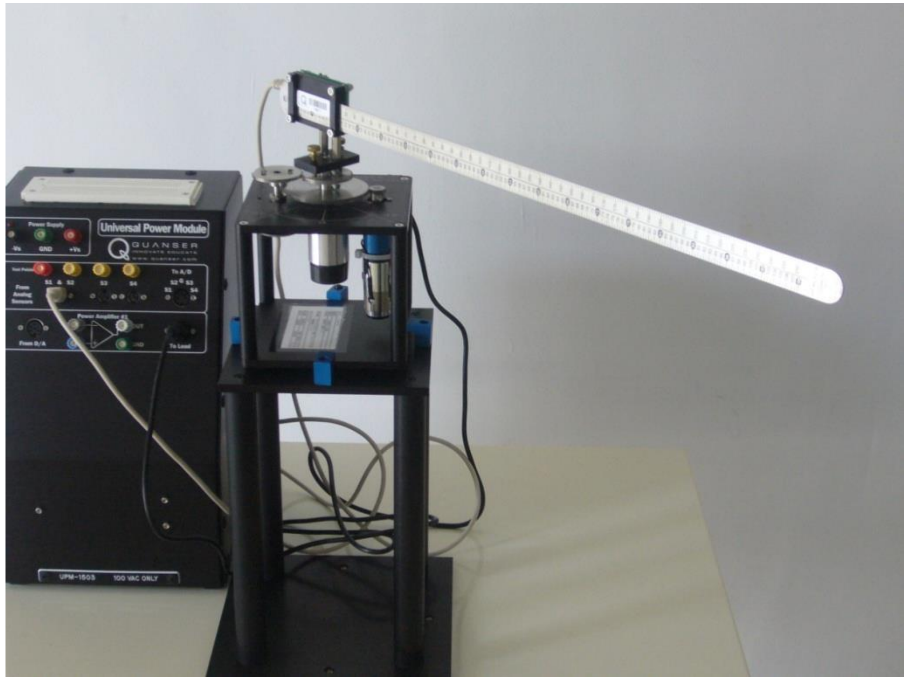
周波数応答から線形システムを作る





入出力関係の周波数情報は，
安定なシステムでなければ適切な情報が得られない

制御対象の伝達関数



未知パラメータ
（正の値）

$$P(s) = \frac{b_1 s^2 + b_2}{s(s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3)}$$

叩いても発散しないが，初期位置はずれる → 安定限界

発散しないので，Routh の安定判別法より $a_1 a_2 - a_3 > 0$

安定限界，不安定なシステムの挙動

説明（定義は講義（線形制御論など）を参照）

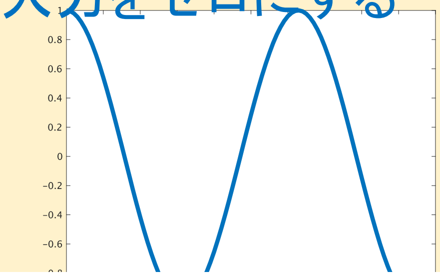
安定限界：　外部入力がない場合に，初期値応答でゼロにならない方程式
不安定　：　外部入力がない場合に，初期値が厳密にゼロでないかぎり発散する

安定限界

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} = -\omega^2 y(t) + u(t)$$

外部入力をゼロにする

解：$y(t) = \cos(\omega t) y(0)$



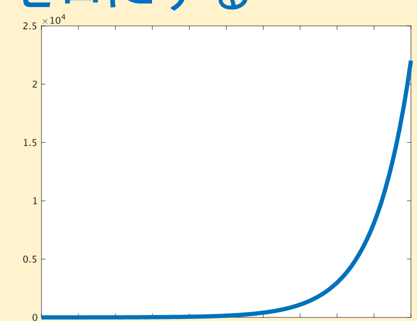
初期値を振幅として振動

不安定

$$\frac{dy(t)}{dt} = y(t) + u(t)$$

外部入力をゼロにする

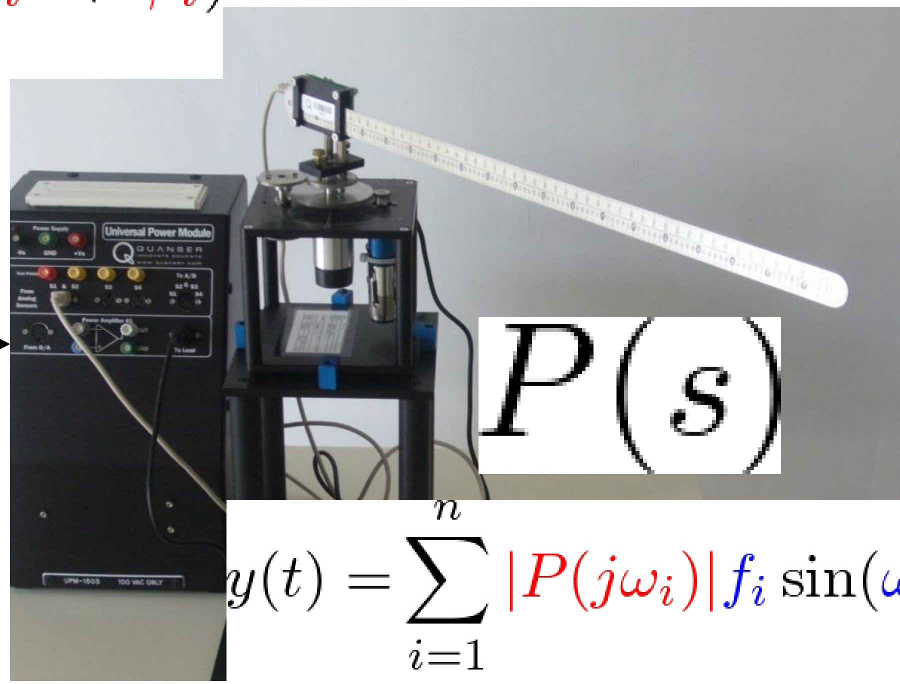
解：$y(t) = e^t y(0)$



初期値から指数関数的に発散

周波数応答

$$u(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i \sin(\omega_i t + \phi_i)$$



$$P(s)$$

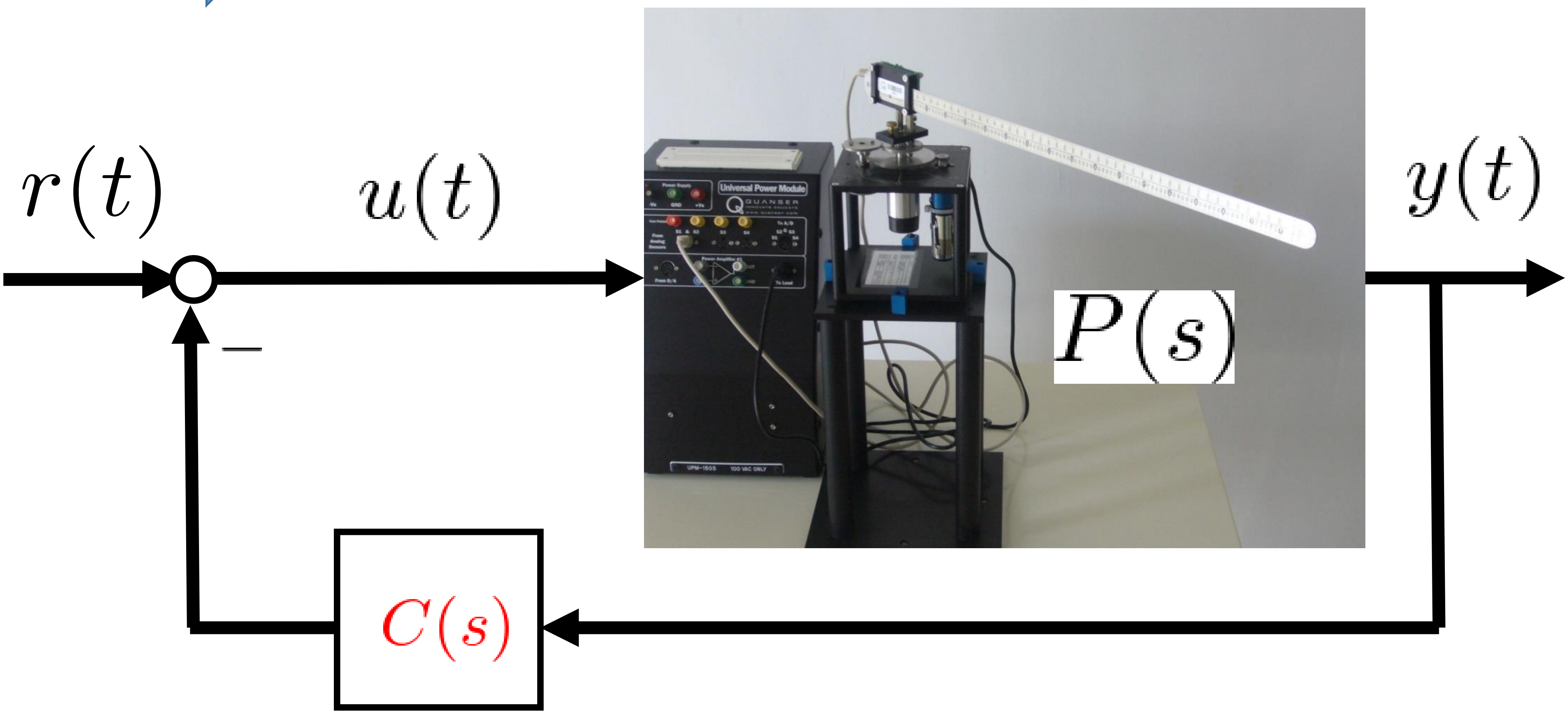
$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} |P(j\omega_i)| f_i \sin(\omega_i t + \phi_i + \angle P(j\omega_i))$$
$$+ (\text{initial response})$$

安定限界なシステムなので，未知の初期値応答が出力に含まれる

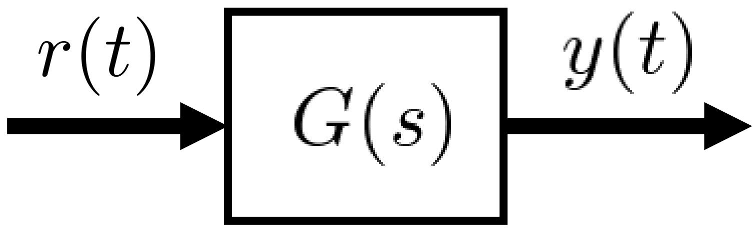
パラメータ推定

安定でなければ，安定にすればよい

⇒ 制御しながらシステムのパラメータを推定する



閉ループ系と伝達関数



$G(s)$ が分かれば，P(s)も分かる

$$G(s) = \frac{P(s)}{1 + P(s)C(s)}$$

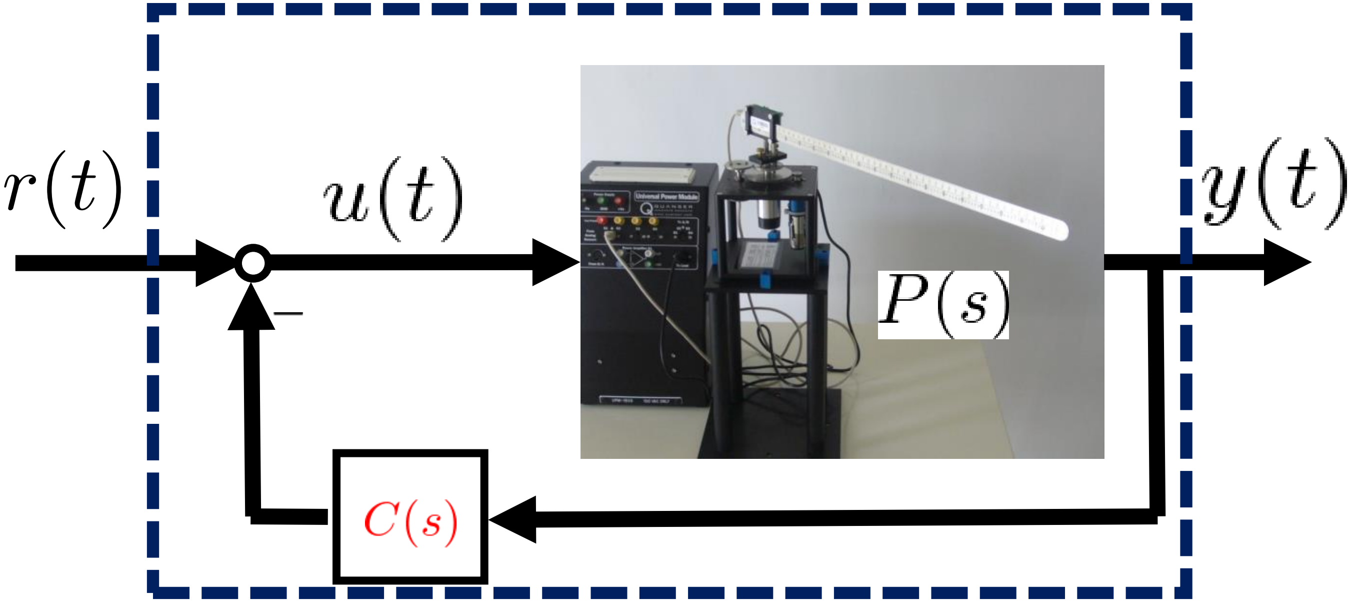
$$P(s) = \frac{G(s)}{1 - G(s)C(s)}$$

実験から求める

設計するので既知

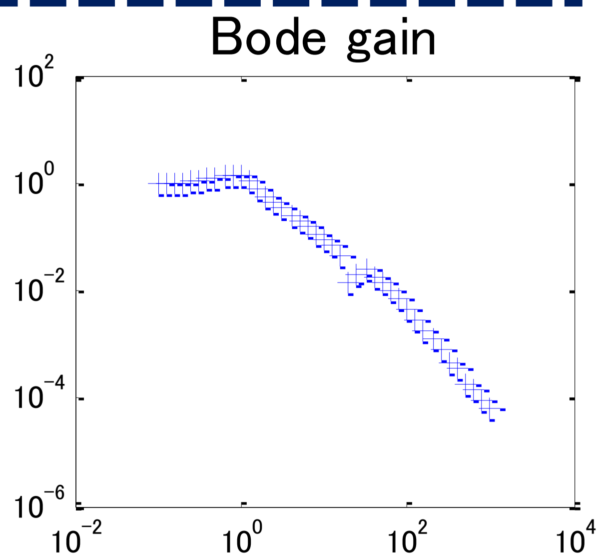
閉ループ系の周波数情報を求めればよい

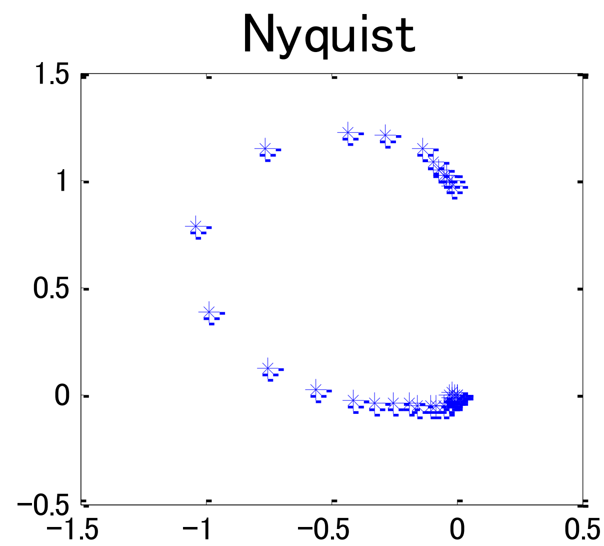
閉ループ系の実験データ



制御器を
試行錯誤で作成し,
データを取る！

$G(s)$

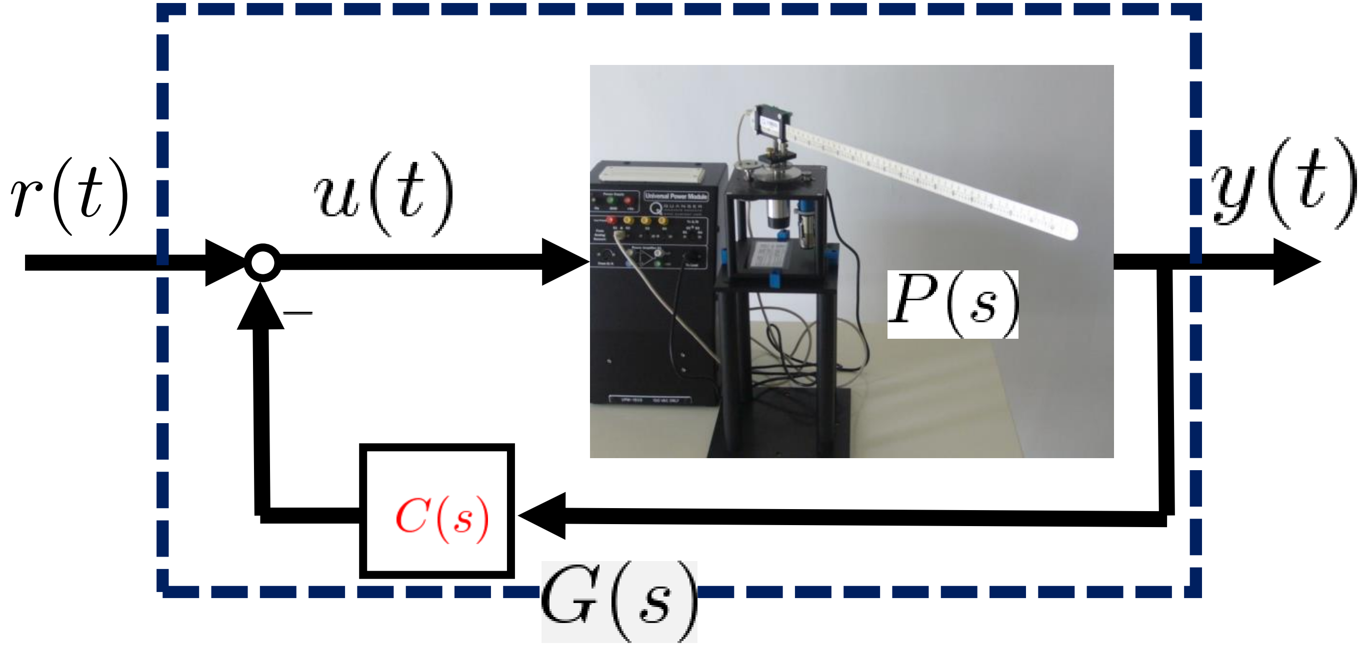




アウトライン

1. 線形システムと周波数情報
2. パラメータ推定
3. 実際の手順
    1. データの前処理
    2. パラメータ推定: 分子多項式係数
    3. パラメータ推定: 分母多項式係数

閉ループ系の伝達関数



制御器は下記に固定

$$C(s) = K_p + \frac{K_I}{s}$$

$$G(s) = \frac{P(s)}{1+P(s)C(s)}$$

$$= \frac{s(b_1 s^2 + b_2)}{s^5 + a_1 s^4 + (a_2 + K_p b_1)s^3 + (a_3 + K_I b_1)s^2 + K_p b_2 s + K_I b_2}$$

未知パラメータを推定する

伝達関数から分かること

$$G(s) = \frac{s(b_1 s^2 + b_2)}{s^5 + a_1 s^4 + (a_2 + K_p b_1)s^3 + (a_3 + K_I b_1)s^2 + K_p b_2 s + K_I b_2}$$

$$G(j\omega) = \left| \frac{j\omega(-b_1\omega^2 + b_2)}{j\omega^5 + a_1\omega^4 - (a_2 + K_p b_1)j\omega^3 - (a_3 + K_I b_1)\omega^2 + K_p b_2 j\omega + K_I b_2} \right| \mathrm{e}^{\angle G(j\omega)}$$

入力に正弦波を入れたときの出力の性質

- ゼロ点 : $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{b_2}{b_1}}$ で出力がゼロ
- 高周波数領域 : $\log_{10}|G(j\omega)| \simeq \log_{10} b_1 - 2\log_{10}\omega$

実験データ ⇒ $b_1,\ b_2$

他のパラメータは
最適化問題として解く（後述）

データの前処理

1. まずは，データの理解
    - 実験から得なければならないのは，閉ループ系の伝達関数
    - 実際に得られるのは入出力データの時系列
      ⇒ 信号処理で伝達関数のデータへ変換したものをデータ保存
2. 使えるデータの整理
    - 雑音や非線形摩擦の項が強いデータは避ける
    - 周波数情報をうまく使う

データの理解

- 実験で得るデータは，時系列の入出力データではない
  - 長時間の時系列データを集めると，計算機のメモリが足りなくなる
    ⇒ データを他の形に変換して収集する

出力の整理

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} |G(j\omega_i)| f_i \sin(\omega_i t + \phi_i + \angle G(j\omega_i))$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \underbrace{|G(j\omega_i)| \cos(\angle G(j\omega_i))}_{=: s_i} f_i \sin(\omega_i t + \phi_i)$$

$$+ \underbrace{|G(j\omega_i)| \sin(\angle G(j\omega_i))}_{=: c_i} f_i \cos(\omega_i t + \phi_i)$$

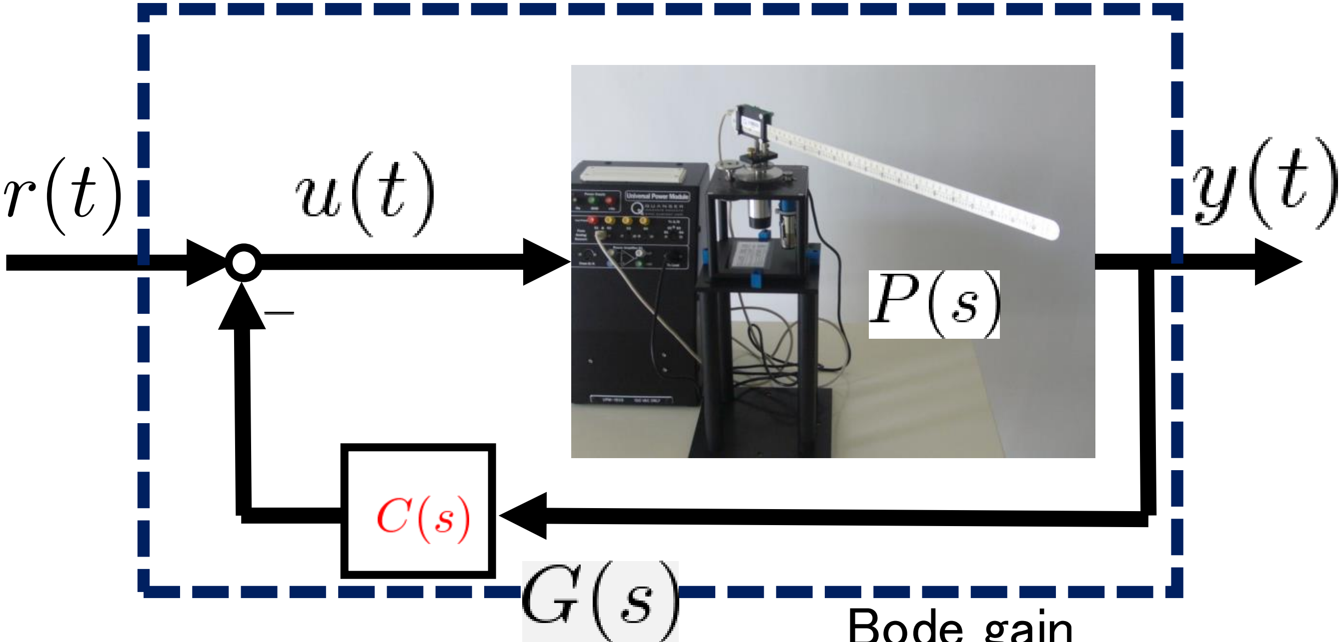
$$|G(j\omega_i)| = \sqrt{s_i^2 + c_i^2}, \quad \angle G(j\omega_i) = \arctan\left(\frac{c_i}{s_i}\right)$$

実験時間に依存せず，周波数伝達関数を求めればよい

s_i, c_i を求めればよい

再帰的最小二乗法を利用

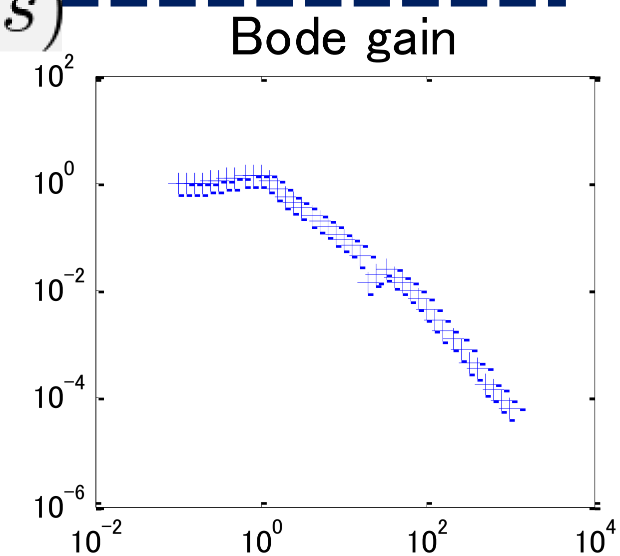
制御器と実験データ

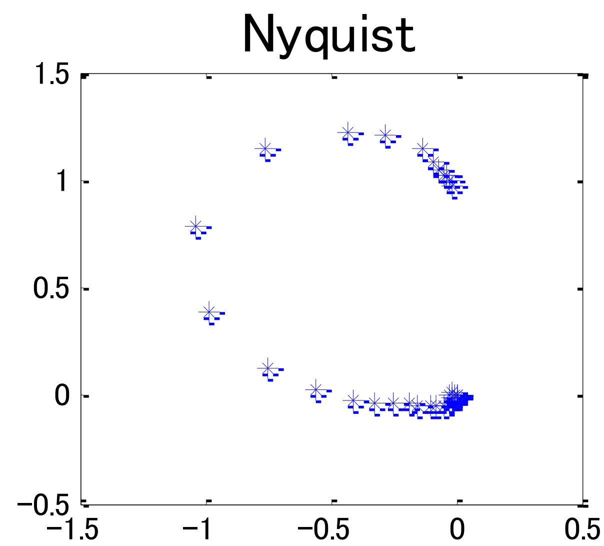


$(K_p, K_I) = (1.65, 0),\ (1, 1)$

の下で，次のデータを得る

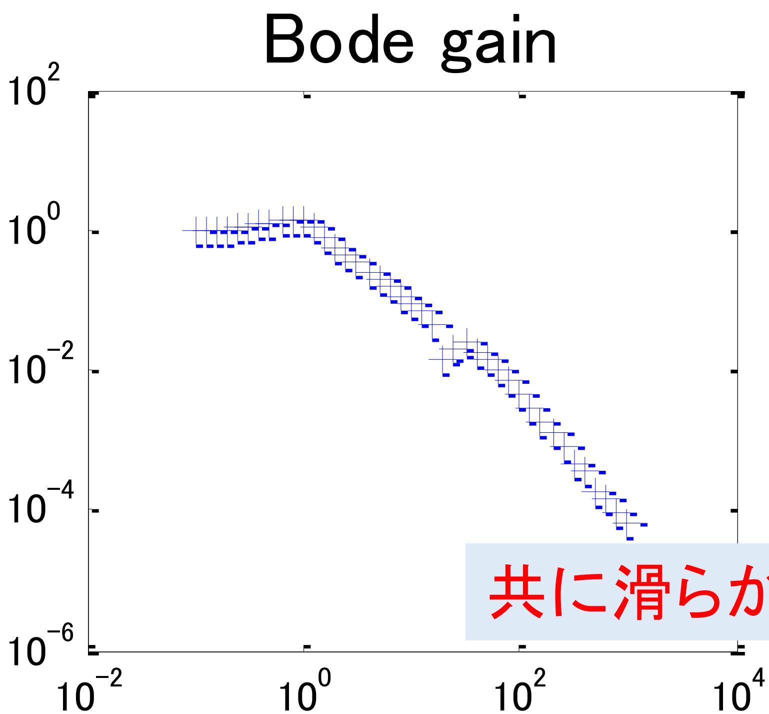
$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} c_1 & s_1 & \cdots & c_n & s_n \end{bmatrix}$$
$$\omega = \begin{bmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \cdots & \omega_n \end{bmatrix}$$

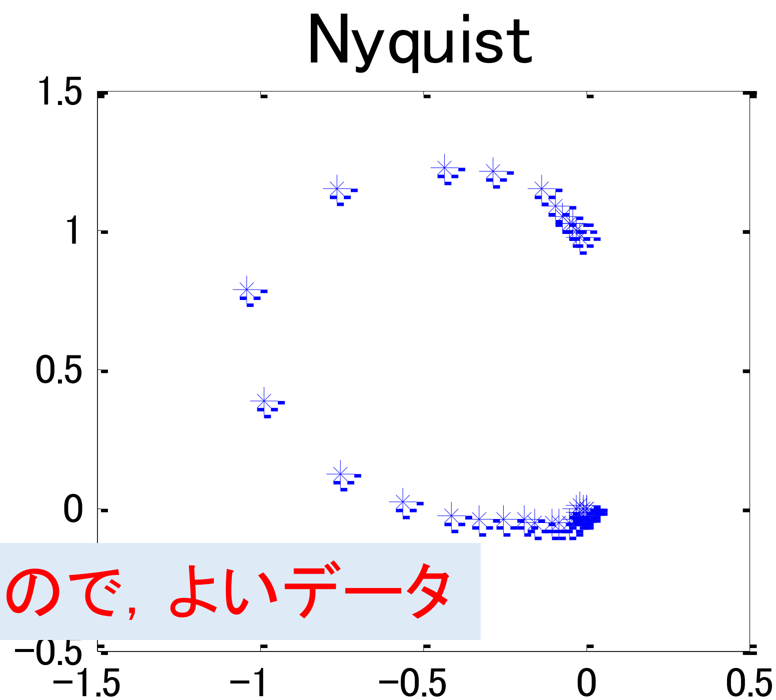




ゲインと位相の注意

- arctan は，sin と cos の符号まで考えれば，360度分
  ⇒ Bode 位相線図は描けない
- Nyquist線図は描ける
  ⇒ 位相の特徴は，Nyquist 線図で確認する

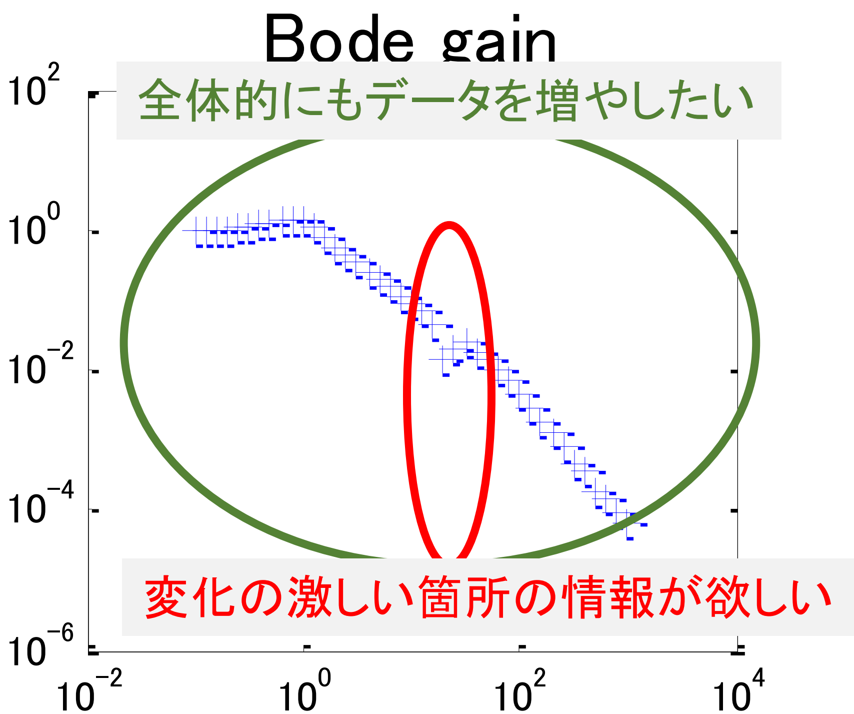


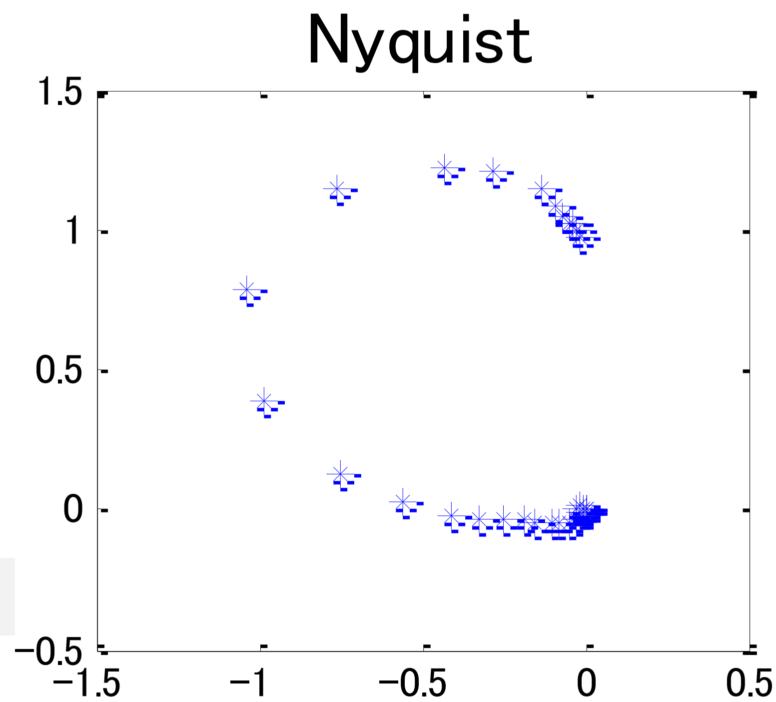


共に滑らかなので，よいデータ

使えるデータの整理

- データは多い方がよい（40個前後のデータは少ない）
  - データには信頼性の低いものも得られてしまう
    ⇒ データを整理する
- 周波数情報（Bode線図，Nyquist 線図を見る）



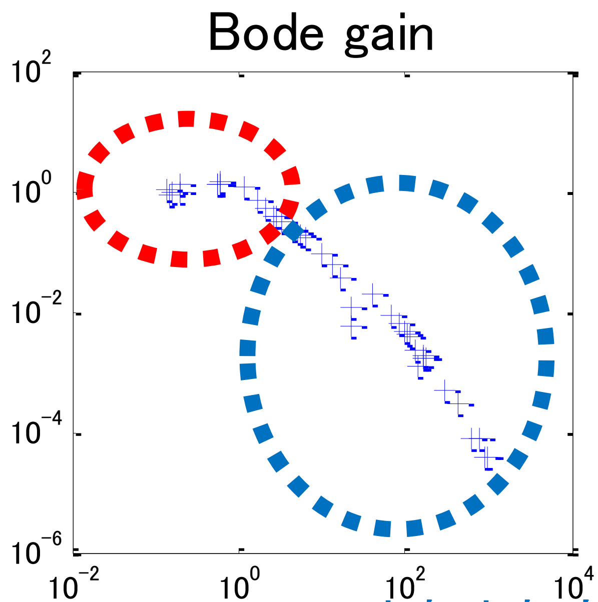


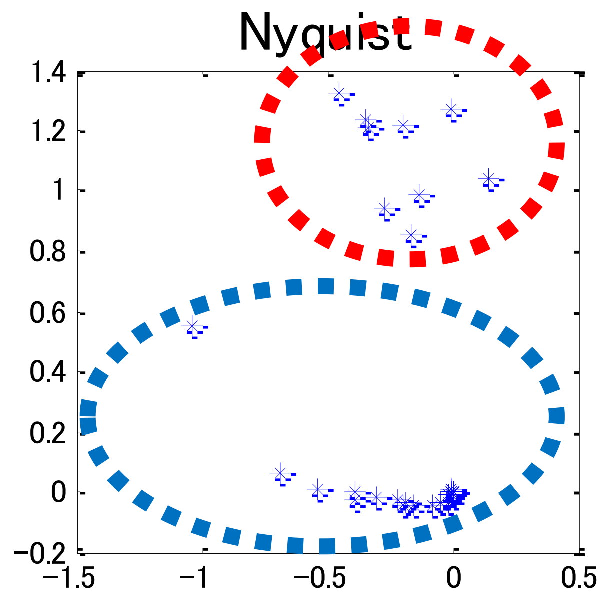
別の実験データ

周波数を変えて実験

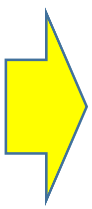
（角周波数を 10^[-1:3] の間をランダムに41点）

ゲインは合っているように見えるが，位相が怪しい





まあまあ良さそうなデータ



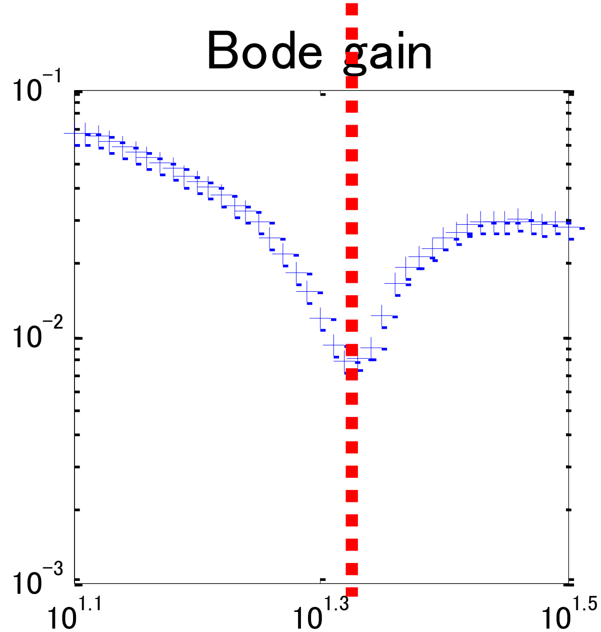
データ整理

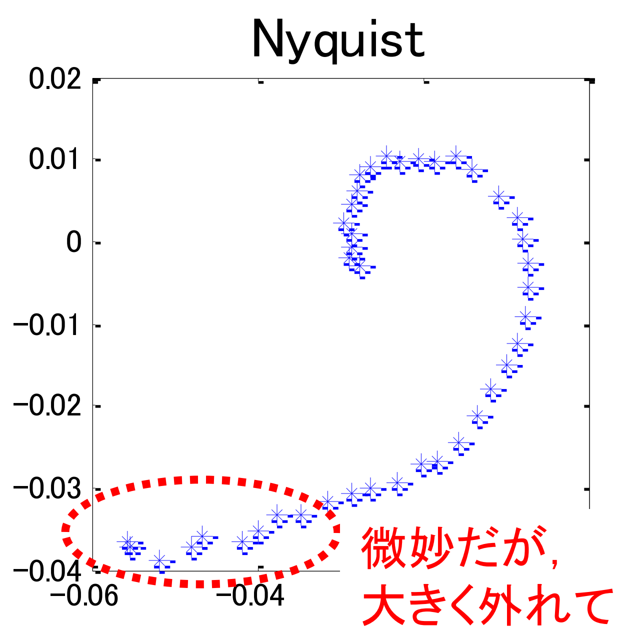
ゼロ点付近のデータ

ゼロ点付近を細かく実験
（角周波数を 10^[-1:3] の間をランダムに41点）

最小値付近の2点の中間くらいの角周波数を選ぶ
<u>*※最小値の角周波数を選ばない*</u>

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{b_2}{b_1}} \simeq 21.135$$





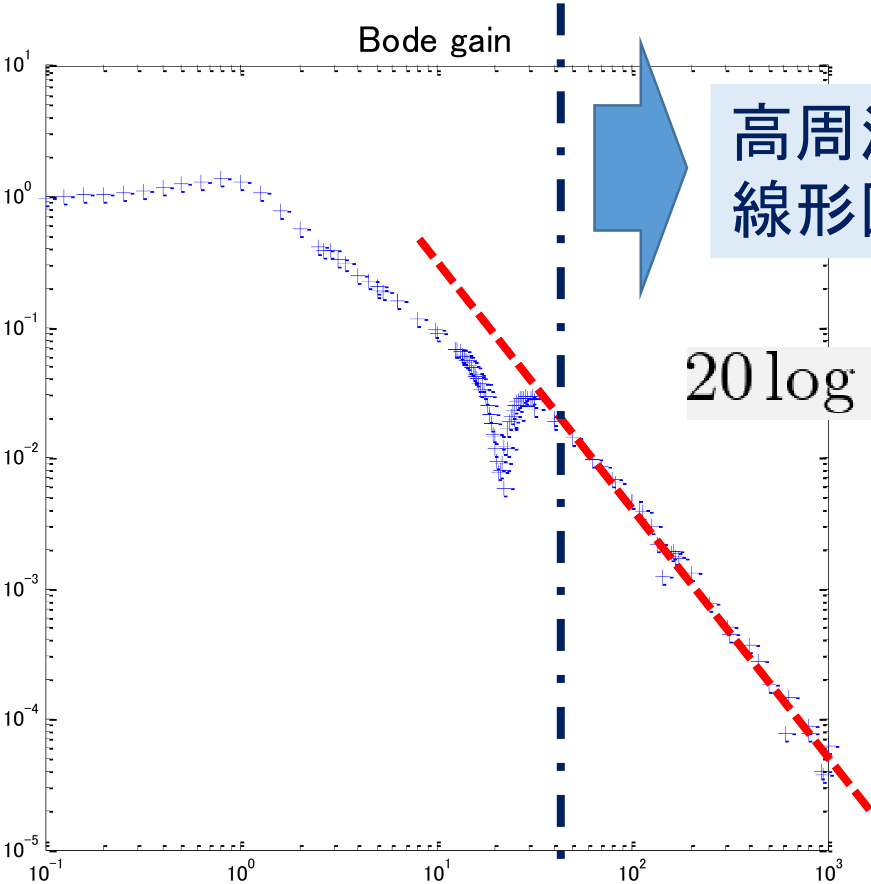
微妙だが，
大きく外れてないので今回は使う

アウトライン

1. 線形システムと周波数情報
2. パラメータ推定
3. 実際の手順
    1. データの前処理
    2. パラメータ推定: 分子多項式係数
    3. パラメータ推定: 分母多項式係数

高周波数領域

- 得られているデータは，高周波数領域では信頼できそう



高周波数領域のデータから
線形回帰でパラメータを求める

※ 高周波数領域は目視で決める

$$20\log|G(j\omega)| \simeq 20\log(K_p b_2) - 40\log\omega$$

$$\begin{aligned} b_2 &= 10^{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\log(\omega_i^2|G(j\omega_i)|)} \\ &\simeq 33.2224 \end{aligned}$$

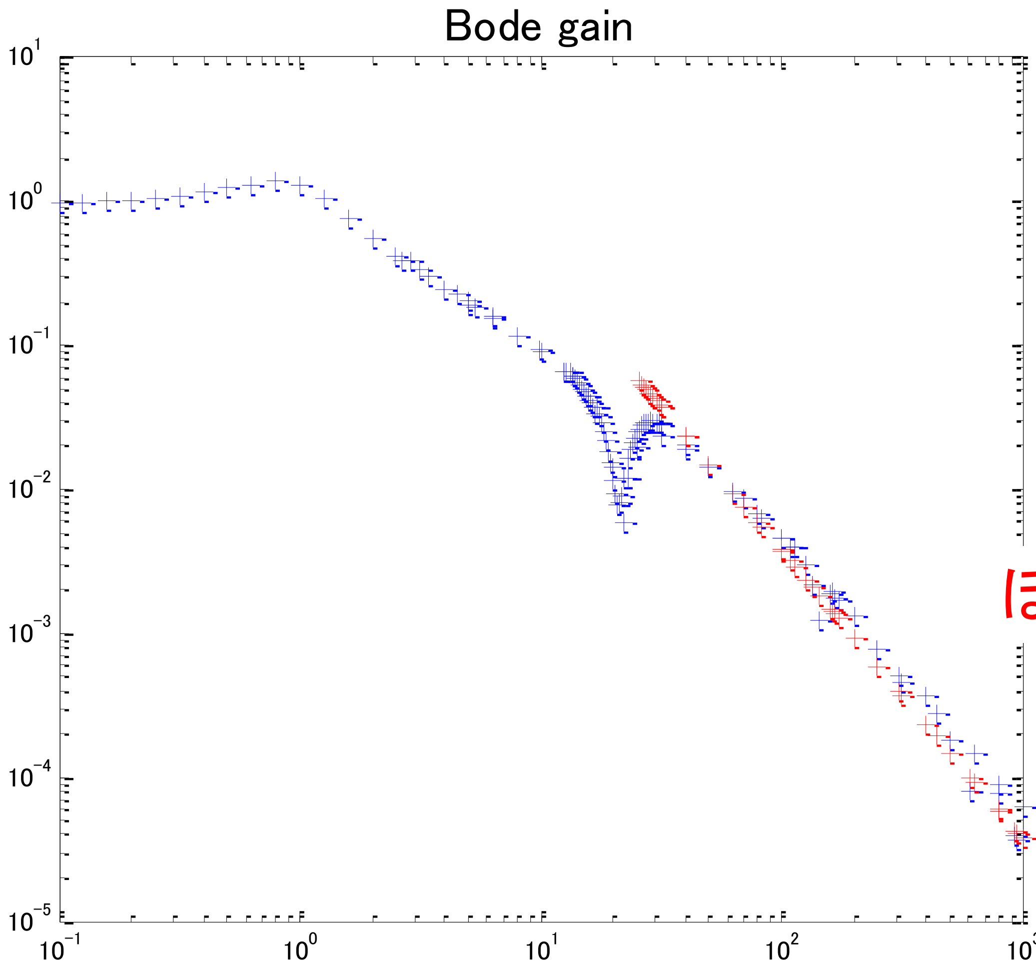
```
Nf= find(omega>10^1.4)
b2=10^(mean(log10((omega(Nf).^2).*gain(Nf))))
```

$$b_1 = \omega_0^2 b_2 \simeq 16627$$

（注）2013 年まで利用した実験機の例

得られたパラメータの妥当性

線形回帰問題は最適化問題なので，得られたパラメータは最小二乗誤差の意味で最適．
ただ，問題設定（高周波領域の設定やデータの選別）が悪いと，意味がない．




```
figure
loglog(omega,gain,'b+');
title('Bode gain','fontsize',16)
hold on

Nf= find(omega>10^(1.4))
b2=10^(mean(log10((omega(Nf).^2).*gain(Nf))))
omega0=21.135;
b1=(omega0^2) * b2;
loglog(omega(Nf),(b2./(omega(Nf).^2)),'r+');
```

ほとんど重なっているので，OK！

アウトライン

1. 線形システムと周波数情報
2. パラメータ推定
3. 実際の手順
   1. データの前処理
   2. パラメータ推定: 分子多項式係数
   3. パラメータ推定: 分母多項式係数

分母多項式のパラメータ推定例

- 与えられているデータや手に入る情報と求めなければならないパラメータを整理し，解くべき問題を定式化
- 求めるアルゴリズムは何でもよいが，得られる閉ループ伝達関数は安定でなければならない．
  - 不安定な極が出る場合はペナルティを課す
  - データは1組の制御ゲイン $(K_p, K_I) = (1,1)$ だが，実際には他のゲインの組でも安定化できる ⇒ ペナルティとして利用できる

$$G_{\mathrm{est}}(s) := \frac{s(b_1 s^2 + b_2)}{s^5 + a_1 s^4 + (a_2 + K_p b_1)s^3 + (a_3 + K_I b_1)s^2 + K_p b_2 s + K_I b_2}$$

$$= \frac{\eta(s)}{\theta^\top \psi(s) + \gamma(s)} \qquad \theta := \begin{bmatrix} a_1, & a_2, & a_3 \end{bmatrix}^\top \in \mathbb{R}^3$$

素朴な最適化問題（非凸）

$$\min_{\theta \in \mathbb{R}^3} \sum_{i=1}^{n} |G(j\omega_i) - G_{\mathrm{est}}(j\omega_i)|^2$$

$$\text{s.t. } a_1, a_2, a_3 > 0, \quad a_1 a_2 > a_3$$

⇔

等価な最適化問題（凸）

$$\min_{\theta \in \mathbb{R}^3} \sum_{i=1}^{n} |(\theta^\top \psi(j\omega) + \gamma(j\omega))G(j\omega_i) - \eta(j\omega_i)|^2$$

$$\text{s.t. } a_1, a_2, a_3 > 0, \quad a_1 a_2 > a_3$$

制約付き最小二乗誤差推定

$$\min_{\theta \in \mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^{n} |(\theta^\top \psi(j\omega) + \gamma(j\omega))G(j\omega_i) - \eta(j\omega_i)|^2$$

$$\text{s.t.}\ a_1, a_2, a_3 > 0, \quad a_1 a_2 > a_3$$

取得したデータおよびその前処理を丁寧にやっているならば，この問題を解けばよい．
最小二乗誤差コストは，外れ値に非常に弱いため，データや前処理が不十分ならば別のコストや制約条件も考えること．

最小化に関係ない項を省いて書き直すと

$$\min_{\theta \in \mathbb{R}^n} (\theta - A^{-1}b)^\top A(\theta - A^{-1}b)$$

$$\text{s.t.}\ \underbrace{a_1, a_2, a_3 > 0,}_{\text{線形不等式制約}} \quad \underbrace{a_1 a_2 > a_3}_{\text{二次不等式制約}}$$

二次不等式制約: $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ 1 \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ 1 \end{bmatrix} > 0$

複素行列: $A := \sum_{i=1}^{n} |G(j\omega_i)|^2 \overline{\psi(j\omega_i)} \psi(j\omega_i)^\top$

実ベクトル: $b := \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Re}\left(\psi(j\omega_i)G(j\omega_i)\{\overline{\eta(j\omega_i)} - \overline{\gamma(j\omega_i)G(j\omega_i)}\}\right)$

$\forall x \in \mathbb{C}^m$, $\bar{x}$ は要素ごとの複素共役

コスト関数例

$$J(a_1, a_2, a_3) = \sqrt{\sum_i (\log(|G(j\omega_i) - G_{\mathrm{est}}(j\omega_i, a_1, a_2, a_3)| + 1))^2}$$

これを最小化する

- ✓ Nyquist 平面における近さを考える
  - ➢ ゲインと位相を両方評価
- ✓ log で測るために，+1を加えている
- ✓ 凸関数ではない

Matlab のコスト関数作成例

```
function Y = cost_function(x,b1,b2,omega,G_data,Kp,Ki)

a1=x(1);
a2=x(2);
a3=x(3);
G = minreal(tf([Kp*b2, Ki*b2, Kp*b1, Ki*b1],[1, a3, (a2 + Kp*b2), (a1 + Ki*b2), Kp*b1, Ki*b1]));
[gain_est,phase_est] = bode(G,omega);
gain_est = squeeze(gain_est)';
phase_est = squeeze(phase_est)' /180*pi;% radに変換
G_est=gain_est.*exp(1i*phase_est);

Y1 = norm(log( abs(G_data - G_est) + 1 ) );% 近さ

pole_max = max(real(pole(G)));% 極の実部の最大値が負でなければならない

Kp = 10; Ki=10; % 別のゲインでも極の実部の最大値が負でなければならない
G = tf([Kp*b2, Ki*b2, Kp*b1, Ki*b1],[1, a3, (a2 + Kp*b2), (a1 + Ki*b2), Kp*b1, Ki*b1]);
pole_max2 = max(real(pole(G)));
if (pole_max >= 0) || (pole_max2 >= 0)
    Y = Y1 + 10^10;
else
    Y = Y1;
end
```

※ このコマンドでの位相は rad ではなく，deg なので注意

コスト関数は色々工夫してみる
- ゲインだけを合わせる
- 実部と虚部で分離して考える

不安定になったらペナルティ

注意

- 最小化は Matlab や Python のライブラリを利用してもよい
（自分で作ってもよいが最適化の授業ではないし，既存のライブラリを使いこなすことも大事な能力なので）
- そもそもデータがおかしければ，最適化問題を解くことの意味がないので，前処理は丁寧に
- 局所最適値になることを避けるため，
初期値を色々変えて行う（多点スタート）
- プログラム例：下記リンク参照
http://www.bode.amp.i.kyoto-u.ac.jp/member/ohki/lec/system_experiment/documents/parameter_estimation_example.pdf