システム工学実験 資料–3
微分方程式と Laplace 変換および線形時不変システムの安定性

数理工学コース 制御システム論分野 大木

2016 年 11 月 17 日

概要

制御工学では, 対象となる線形システムの入出力関係を表わす数理モデルとして, 時間領域における微分方程式 (状態空間表現という) もしくは周波数領域における伝達関数表現の 2 つを用いる．制御器の設計を考える際には状態空間表現が便利であり, ロバスト性や制御系の性能解析では伝達関数表現が便利である．伝達関数表現は線形時不変システム[*1]（Linear Time Invariance system, LTI system）しか扱えないため，非線形制御や計算機を用いた制御系設計を主軸に考えるのであれば，時変線形システムや非線形システムへの制御理論を考えた状態空間表現から学ぶことを薦めるが，伝達空間表現は Hardy 空間などの複素関数解析学と相性がよく, 深い議論が可能である．また, フィードバック制御の理論が電気電子回路の設計を目的として発展したという歴史的な理由もあり, 電気系を主として扱う産業では伝達関数表現がよく用いられる．線形時不変モデルによる数理モデル化は，計算機が発達した今でも様々な場面で用いられており，その応用範囲は狭くない．

こうした事情を踏まえ, 本稿では線形時不変システムを扱い，その数理モデルを伝達関数で表わし, 基本的な演算の習得と理解を目指す．まずは Laplace 変換の演習を行い, 微分方程式を代数方程式へ変換することや Laplace の最終値定理などを学ぶ．次に, システムの安定性が, 伝達関数の極で判別できることを天下り的に述べ, 代表的な安定判別法である Routh–Hurwitz の方法を学ぶ．3 節では, ブロック線図とシステムの結合について学び, 結合によって安定性がどのように変化するかを演習を通して確認する．4 節では, フィードバック結合の安定判別法である, Nyquist の安定判別法について学ぶ．5 節では, 安定な伝達関数の性能を可視化した, Bode 線図を導入し, 折れ線近似法を用いた簡単な図示法を学ぶ.

1 Laplace 変換

1.1 準備

1 変数関数 $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ が, ある正数 $a > 0$ を用いて $|f(t)|e^{-at}$ の積分値が有限確定となるとき, (片側)Laplace 変換可能であるという．このような正数 a の下限を $\underline{a(f)}$ で表わす[*2]. Laplace 変換可能な関数は, 次のように

[*1] ここでは定係数の線形常微分方程式でダイナミクスが記述されるものを，線形時不変システムと呼ぶ．偏微分方程式で記述される分布定数系は扱わない．

[*2] “下限”なので，$|f(t)|e^{-\underline{a(f)}t}$ の積分は有限確定するとは限らない．また，ここでは正数に限ったが，数学としてはこの仮定は本質ではない．

Laplace 変換が定義できる.

$$F(s) := \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt, \quad s \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(s) > \underline{a(f)}. \tag{1}$$

Laplace 変換を $\mathcal{F}$ で表わすと, Laplace 変換は $F = \mathcal{F}[f]$ となる. この複素関数 F の定義域は, 複素平面上のある実数 $\underline{a(f)}$ 通る, 虚軸に並行な直線の開右半平面で定義され, 収束領域と呼ばれる. 収束領域上で, 複素関数 $F(s)$ は解析的である. 収束領域は, 解析接続を用いて特異点を除く複素平面全域に拡張できる (一致の定理). 定義域を特異点を除いた複素平面全体とした関数も, 同様に $F(s)$ で表す(*3. 以下では, F の定義域を複素平面全体と形式的に表わし, 「特異点を除く」と断らない.

Laplace 変換された関数 $F(s)$ は, 次の Bromwich(ブロムウィッチ) 積分により, 元の関数に戻せる.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\underline{a(f)}-j\infty}^{\underline{a(f)}+j\infty} F(s)e^{st}ds,\ t \geq 0.$$

この変換を, **逆 Laplace 変換**と呼ぶ. 逆 Laplace 変換を $\mathcal{F}^{-1}$ で表わすと, 逆 Laplace 変換は $f = \mathcal{F}^{-1}[F]$ となる. ここで複素解析における Jordan の補題を用いると, 虚軸に並行な直線上の積分を周回積分によって表わすことができる.

$$f(t) = \lim_{R\to\infty}\left(\frac{1}{2\pi j}\int_{\underline{a(f)}-jR}^{\underline{a(f)}+jR} F(s)e^{st}ds + \frac{1}{2\pi j}\int_C F(s)e^{st}ds\right).$$

ここで積分路 C は, 反時計回りの向きに定義された, 原点を中心とし起点を $\underline{a(f)}+jR$, 終点を $\underline{a(f)}-jR$ とする半径 R の円の一部である(*4. したがって, この半円と直線に囲まれた閉曲線内の特異点から, 留数定理を用いて Bromwich 積分を計算することができる.

実用上とくに重要なものは, $F(s)$ が有理関数で表わされる場合である.

$$F(s) = \frac{\prod_{k=1}^m (s-b_k)^{m_k}}{\prod_{i=1}^n (s-a_i)^{n_i}}.$$

ここで m_k, n_i はそれぞれ $(s-b_k)$, $(s-a_i)$ の多重度である. $F(s)$ が有理関数で, 分母多項式の最高次数が分子多項式の最大次数よりも 2 以上大きい場合, 逆 Laplace 変換は次のように表わせる.

$$f(t) = \sum_{i=1}^n \frac{d^{n_i-1}}{ds^{n_i-1}}\left((s-a_i)^{n_i}F(s)e^{st}\right)\Bigg|_{s=a_i}. \tag{2}$$

一見すると式 (2) は複雑に見えるが, 慣れると簡単である. 例えば

$$F(s) = \frac{s-1}{(s+1)^2(s+2)}$$

の場合,

$$\begin{aligned}
f(t) &= \lim_{s\to-1}\left\{\frac{d}{ds}\left((s+1)^2F(s)e^{st}\right)\right\} \\
&\quad + \lim_{s\to-2}\left\{(s+2)F(s)e^{st}\right\} \\
&= \lim_{s\to-1}\left\{\frac{3+t(s-1)(s+2)}{(s+2)^2}e^{st})\right\} \\
&\quad + \lim_{s\to-2}\left\{(s+2)F(s)e^{st}\right\} \\
&=(3-2t)e^{-t} + 3e^{-2t}
\end{aligned}$$

となる.

(*3 多くの場合, この解析接続の手順を省略し, Laplace 変換後の関数は複素平面全体で定義されているものとして議論することが多い.

(*4 $\underline{a(f)}$ を通る虚軸に平行な直線に対し, 左側に弧を加える. これは $t > 0$ のときに Jordan の補題が適用できる領域になるため. 右側に適用するには, $t < 0$ を考えなければならない.

1.2 問題

1.2.1 Laplace 変換

問題 1. 定義 (1) に従い, 次の関数を Laplace 変換せよ. ただし, 関数 f は $[0,\infty)$ を引数に持ち, $t<0$ では $f(t)=0$ とする.

(1) $f(t)=1$.
(2) $f(t)=t$.
(3) $f(t)=\exp(at)$. ただし, $a\in\mathbb{R}$.
(4) $f(t)=\sin(\omega t+\phi)$. ただし, $\omega>0$, $\phi\in[0,2\pi)$.
(5) $f(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi\sigma^2}}\exp(-t^2/\sigma^2)$. ただし, $\sigma>0$. また, Laplace 変換した関数 $F(s)$ に対し, $\sigma\to 0$ の極限を取るとどうなるか?

問題 2. 次の関数 F を逆 Laplace 変換せよ. ただし, $s\in\mathbb{C}$ とする.

(1) $F(s)=\frac{1}{s}$.
(2) $F(s)=\frac{1}{s^2}$.
(3) $F(s)=\frac{1}{s+a}$. ただし, $a\in\mathbb{R}$.
(4) $F(s)=\frac{1}{s^2+\omega^2}$. ただし, $\omega>0$.
(5) $F(s)=\exp(-s^2)$.

1.2.2 微分方程式の変換

Laplace 変換の重要な性質として,「微分」を「掛け算」に変換するという性質がある. これは, 正方行列の対角化を一般化した概念であり, 微分作用素の対角化や固有値問題の解析に用いられる. $tf(t)$ のように, 元々掛け算になっている場合は, 変換すると逆に微分が現れる. つまり, 次の対応関係がある.

$$\frac{d}{dt}\leftrightarrow s,\quad t\leftrightarrow -\frac{d}{ds}.$$

対応関係は, 次の問題で確認されたい (部分積分, 積分と微分の順序の入れ替えなどを使えばよい).

問題 3. 次の微分方程式を Laplace 変換し, 複素数 s の方程式に変換せよ. ただし, $f(0)=f_0$ とする.

(1) $\frac{d}{dt}f(t)=af(t)$. ただし $a\in\mathbb{R}$.
(2) $\frac{d}{dt}f(t)=tf(t)$.
(3) $\frac{d}{dt}f(t)=u(t-\tau)$. ただし, $\tau>0$ で, u は Laplace 変換可能な関数.

問題 4. $Y(s)=G(s)U(s)$ とし, $Y(s)=\mathcal{F}[y]$, $U(s)=\mathcal{F}[u]$ とする. $G(s)$ が以下のように与えられているとき, 微分方程式に変換せよ.

(1) $G(s)=\dfrac{1}{s+a}$. ただし $a\in\mathbb{R}$.
(2) $G(s)=\dfrac{s+2}{s^2+1}$.
(3) $G(s)=\dfrac{1}{s+a}e^{-sL}$. ただし $a\in\mathbb{R}$, $L>0$.

1.3 応用問題: 線形時不変システム

Laplace 変換を用いると, 線形時不変システムを有理関数で表わすことができる. たとえば, $n\geq m$ の場合, u を入力としたときの出力 y がしたがう方程式

$$\sum_{i=1}^{n}a_i\frac{d^i}{dt^i}y(t)=\sum_{i=1}^{m}b_i\frac{d^i}{dt^i}u(t)$$

は, y の $n-1$ 階微分までの初期値と u の $m-1$ 階微分までの初期値を零として,

$$Y(s)=G(s)U(s)$$

で表わせる. ここで $G(s)$ は**伝達関数 (transfer function)** と呼ばれる. 入出力応答の性質は, この伝達関数に全て含まれている. 伝達関数 $G(s)$ の分母多項式の最大次数が 1 の場合を 1 次系, 2 の場合を 2 次系という. 代数学の基本

定理より, 実係数多項式は, 1 次の実係数多項式と 2 次の実係数多項式の積に分解できる(*5.

問題 5. 次の微分方程式を Laplace 変換し, 代数方程式に変換せよ. また, そのときの伝達関数を求めよ. ただし, $y(0) = y_0$, $\frac{d}{dt}y(0) = y'_0$ とし, u は Laplace 変換可能な関数とする.

(1) $\dfrac{d^2}{dt^2}y(t) + a\dfrac{d}{dt}y(t) + by(t) = u(t)$.

(2) $\dfrac{d}{dt}y(t) = -u(t-\tau)$. ただし, $\tau > 0$.

(3) $\dfrac{d}{dt}y(t) = -y(t-\tau) + u(t)$. ただし, $\tau > 0$.

伝達関数の分母多項式の次数は, 分子多項式の次数以上になる. これは, 次のように因果関係から説明される.

$$\begin{aligned}&\frac{d^2}{dt^2}y(t) + a_1\frac{d}{dt}y(t) + a_0 y(t)\\ =&b_1\frac{d}{dt}u(t) + b_2 u(t)\end{aligned}$$

の両辺を積分すると,

$$\begin{aligned}&y(t) - y(0)\\ =&-a_1\int_0^t dt' y(t') - a_0\int_0^t\int_0^{t'} dt' d\tau y(\tau)\\ &+b_1\int_0^t dt' u(t') + b_0\int_0^t\int_0^{t'} dt' d\tau u(\tau)\end{aligned}$$

となる. あきらかに, $y(t)$ は u の過去の履歴を必要とする関数である. u の方が微分演算子の次数が大きい場合, 今度は逆に u を決めるには y の過去の履歴が必要である. したがって, u が入力で y が出力の場合, 因果関係があるため, y にかかる微分演算子の次数の方が, u にかかる次数よりも大きくなる. 微分演算子 $\frac{d}{dt}$ は s に対応するので, これはそのまま s の次数に当てはまる. 分母多項式の次数が分子多項式以上の s の有理関数を**プロパー (proper)** であるという. 分母多項式の次数が厳密に分子多項式のものよりも大きい場合, **厳密にプロパー (strictly proper)** であるという. 分母多項式と分子多項式の次数が同じであるとき, **バイプロパー (biproper)** であるという.

厳密にプロパな伝達関数には, 次のような性質がある.

問題 6. $G(s)$ は安定で厳密にプロパな有理関数であるとする (安定性は後で定義するので, ここでは気にしなくてよい).

(1) $G(s)$ が厳密にプロパであるとき, $\int_{-\infty}^{\infty}|G(j\omega)|^2 d\omega$ は有限になる. このことを $G(s) = \dfrac{1}{s+a}$ で確認し, 値を求めよ ($a > 0$ とする).

(2) $g(t) := \mathcal{F}^{-1}[G(s)]$ としたとき, Parseval の等式より,

$$\int_0^{\infty}|g(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|G(j\omega)|^2 d\omega$$

が成り立つ. このことを, $G(s) = \dfrac{1}{s+a}$ で確認せよ ($a > 0$ とする).

(3) $G(s) = \dfrac{1}{s+a}$ とし, $g(t) := \mathcal{F}^{-1}[G(s)]$ とする. このとき,

$$\frac{d}{dt}v(t) = -2av(t) + 1$$

の定常解 v_∞ が初期値 $v(0) = v_0$ によらず存在し,

$$v_\infty = \int_0^{\infty}|g(t)|^2 dt$$

となることを確認せよ.

Laplace の最終値定理と呼ばれる, よく用いられる定理を紹介しておく. $\lim_{t\to\infty} y(t)$ が有

(*5 複素係数多項式で考える場合, 1 次系のみの積で表わすことができる.

限確定するとき, 次が成り立つ:

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) \tag{3}$$

ただし, $Y(s) = \mathcal{F}[y(t)]$ である.

大事なことなので繰り返すが, Laplace の最終値定理は $\lim_{t\to\infty} y(t)$ が有限確定するときに成り立つ定理であり, 例えば

$$Y(s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2} = \mathcal{F}[y(t) = \cos(\omega t)]$$

に対しては使えない. このとき, $\lim_{s\to 0} sY(s) = 0$ となるが, $y(t)$ は振動し続けるため, $\lim_{t\to\infty} y(t)$ は存在しないことに注意されたい.

問題 7. $Y(s) = \mathcal{F}[y(t)] = G(s)U(s)$ とする.

(1) $G(s) = \dfrac{1}{s+a}$, $U(s) = \dfrac{1}{s}$ のとき, $\lim_{t\to\infty} y(t)$ を求めよ. ただし, $a > 0$ とする.

(2) $G(s) = \dfrac{1}{s+a}$, $u(t) = e^{-t}\sin(\omega t)$ のとき, $\lim_{t\to\infty} y(t)$ を求めよ. ただし, $a, \omega > 0$ とする.

(3) $U(s) = \dfrac{1}{s}$ とする. また, $G(s) = \dfrac{\gamma s^2+\delta s+\epsilon}{s^2+\alpha s+\beta}$ とし, $\alpha, \beta > 0$ とする. $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$ となるためには, $G(s)$ の係数はどのような条件を満たす必要があるか?

(4) $U(s) = \dfrac{1}{s}$ とする. また, $G(s) = \dfrac{\gamma s^2+\delta s+\epsilon}{s^2+\alpha s+\beta}$ とし, $\alpha, \beta > 0$ とする. ある定数 $a > 0$ が与えられたとき, $\lim_{t\to\infty} y(t) = a$ となるためには, $G(s)$ の係数はどのような条件を満たす必要があるか?

(5) $U(s) = \dfrac{1}{s^2+\omega^2}$ とする. また, $G(s) = \dfrac{s^2+\omega^2}{s^2+\alpha s+\beta}$ とし, $\alpha, \beta > 0$ とする. このとき, $y(t) = \mathcal{F}^{-1}[Y(s)]$ を計算し, $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$ を確かめよ.

(6) $U(s) = \dfrac{1}{s^2+\omega^2}$ とする. また, $G(s) = \dfrac{\gamma s^2+\delta s+\epsilon}{s^2+\alpha s+\beta}$ とし, $\alpha, \beta > 0$ とする. $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$ となるためには, $G(s)$ の係数はどのような条件を満たす必要があるか?
(ヒント: $G(s)U(s)$ の分母多項式の根が, 開複素左半平面にあることが必要.)

制御系設計の段階で改めて述べるが, $\int_0^\infty |u(t)|dt$ が発散するような入力を系に加える場合, Laplace 変換後の $U(s)$ の不安定極を, $G(s)$ の不安定零点で相殺する必要がある (内部モデル原理と呼ばれる). 制御目標は, 目標追従制御のように, 目標値が動的な場合もある. この場合, 内部モデル原理が追従性能を保証する.

2 線形時不変システムの安定性

伝達関数が虚軸を含む閉複素右半平面で解析的であるとき, システムは (狭義の意味で) 安定であるという(*6. これは, 線形時不変系の場合，伝達関数が有理関数となるため，システムの極が複素開左半平面に存在することと同値である. ここでシステムの極とは, 線形時不変系の伝達関数 $G(s)$ の特異点のことをいう. システムが安定であるとは, $g(t) := \mathcal{F}^{-1}[G(s)]$ が,

$$\lim_{t\to\infty} g(t) = 0$$

となることを意味する(*7. 線形近似した系が不安定であっても, 実際の応答が発散するとは限

(*6 元々は，常微分方程式論における「平衡点」の安定性に由来する.「システムの安定性」は，制御の分野以外ではあまり使われない用語なので，使うときには注意が必要.

(*7 極限が発散しないという意味で, 安定であるということもある. この場合, $G(s)$ の極は, 虚軸上のものを除く極は開左半平面に存在し, 虚軸上の極は単根である. とくに虚軸上に単根がある場合, 安定限界であるという.

らないことに注意せよ.

システムの安定性は, 調べなければならない最も基本的な性質の一つである. 線形時不変系の場合, 次の安定判別法が知られている.

- Routh-Hurwitz の安定判別法.
- Hurwitz の方法.

ここでは Routh-Hurwitz の安定判別法を述べる.

実係数の s の多項式

$$A(s) = a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$$

が安定多項式であるとは, $A(s) = 0$ の根の実部が全て厳密に負になることをいう. ここで, $A(s)$ を次の 2 つに分解する.

$$\begin{aligned} A_0(s) :=& a_n s^n + a_{n-2}s^{n-2} + \cdots, \quad (4)\\ A_1(s) :=& a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-3}s^{n-3} + \cdots. \quad (5)\end{aligned}$$

例えば, $n = 3$ の場合は

$$\begin{aligned} A_0(s) :=& a_3 s^3 + a_1 s,\\ A_1(s) :=& a_2 s^2 + a_0\end{aligned}$$

となる. これを用いて, 次の Routh 表と呼ばれる表を作る.

n	a_n	a_{n-2}	$\cdots$
$n-1$	a_{n-1}	a_{n-3}	$\cdots$
$n-2$	$b_1^{(1)}$	$b_2^{(1)}$	$\cdots$
$n-3$	$b_1^{(2)}$	$b_2^{(2)}$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
0	$b_1^{(n-2)}$	$b_2^{(n-2)}$	$\cdots$

ただし, n が偶数の場合は表の a_0 の下の項目に 0 を入れる. ここで,

$$\begin{aligned} b_1^{(1)} =& \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}},\\ b_2^{(1)} =& \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}},\\ &\vdots\\ b_m^{(1)} =& \frac{a_{n-1}a_{n-2m} - a_n a_{n-2m-1}}{a_1},\\ b_1^{(2)} =& \frac{b_1^{(1)}a_{n-3} - a_{n-1}b_2^{(1)}}{b_1^{(1)}},\\ b_2^{(2)} =& \frac{b_1^{(1)}a_{n-5} - a_{n-1}b_3^{(1)}}{b_1^{(1)}},\\ &\vdots\\ b_m^{(2)} =& \frac{b_1^{(1)}a_{n-2m-1} - a_{n-1}b_{m+1}^{(1)}}{b_1^{(1)}},\\ b_m^{(k)} =& \frac{b_1^{(k-1)}b_m^{(k-2)} - b_1^{(k-2)}b_m^{(k-1)}}{b_1^{(k-1)}}\end{aligned}$$

である. このとき, $a_i > 0$, $i = 0, \cdots, n$ かつ $b_1^k > 0$, $k = 1, \cdots, n-2$ が成り立てば, 系は安定である [1, 4.5 節].

問題 8. 次の伝達関数が安定であるかどうかを確認せよ.

(1) $G(s) = \dfrac{1}{s^2 + s - 1}$.

(2) $G(s) = \dfrac{1}{s}$.

(3) $G(s) = \dfrac{1}{s^3 + 2s + 1}$.

(4) $G(s) = \dfrac{s^2 - 1}{s^3 + s^2 + s + 1}$.

次の安定限界な伝達関数 G に対し, 次のような入出力応答を考える.

$$Y(s) = G(s)U(s), \quad G(s) = U(s) = \frac{1}{s}.$$

このとき, $y(t) = t$ となり, $t \to \infty$ で発散する.

しかし, 例えば

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, T) \\ 0, & t \geq T \end{cases}$$

の場合, $G(s) = \frac{1}{s}$ を通すと,

$$y(t) = \int_0^{\min\{t,T\}} dt = \min\{t, T\}$$

となるので, 安定限界なシステムの場合であっても, 有限な時刻で入力を完全に零にできれば, 発散はしない (不安定な場合は, 有限時間しか入力を入れなくとも, 発散する). この点は, 不安定システムと異なる.

ほとんど全ての物理・工学モデルは非線形であり, 線形に動作する領域について考える場合は線形化を行う. 線形化モデルが安定限界の場合であっても, 非線形の項まで考えると安定になることもある. 例えば,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}y(t) =& y(t) - y(t)^3 \\ =& y(t)\bigl(1 - y(t)\bigr)\bigl(1 + y(t)\bigr)\end{aligned}$$

は，平衡点が $0, \pm 1$ の 3 つある．各平衡点の近傍で線形化すると，0 付近で線形近似したものは不安定，それ以外の平衡点周りでは安定になる．0 以外の平衡点が不安定平衡点を挟んでいるので，非線形系は（発散しないという意味で）安定である．また，

$$\frac{d}{dt}y(t) = -y(t)^3$$

は, 右辺は $y(t)$ と異符号になるため, 0 に収束する. しかし, この線形化モデルは $\frac{d}{dt}y(t) = 0$ であり, 安定限界である. このように, 安定限界なシステムの安定性は, 厳密な線形モデルでない限り, 非線形な効果によって安定性が変わることに注意されたい. 線形化したシステムが安定ならば, その線形化の妥当性が成り立つ限り, 安定である.

問題 9. 次の伝達関数が安定であるための, 係数の条件を求めよ.

(1) $G(s) = \dfrac{1}{s+a}$.

(2) $G(s) = \dfrac{1}{s^2 + as + b}$.

(3) $G(s) = \dfrac{s^2 - 1}{s^3 + as^2 + bs + c}$.

(4) $P(s) = \dfrac{1}{s+a}e^{-sT}$, $a, T > 0$ とする. この系が安定となるための必要十分条件は, $aT < \frac{\pi}{2}$ である. むだ時間要素 e^{-sT} を次のように近似する (N 次の Pade 近似).

$$e^{-sT} = \frac{e^{-sT/2}}{e^{sT/2}} \simeq \frac{\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}\left(-\frac{T}{2}s\right)^k}{\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}\left(\frac{T}{2}s\right)^k}$$

このとき, $N = 1, 2, 3$ のときの, 系が安定となるパラメータの条件を求め, 厳密解と比較せよ.

安定性は, パラメータに関して連続的でない. 例えば, $y(t) = \exp(-at)\sin(\omega t)$, $a, \omega > 0$ を考えよう. このとき,

$$\lim_{a\to 0}\lim_{t\to\infty} y(t) \neq \lim_{t\to\infty}\lim_{a\to 0} y(t)$$

である. 任意の固定したパラメータ $a > 0$ に対して $y(t)$ は 0 へ収束するが, 任意の固定した時刻 t に対して, $\lim_{a\to 0} y(t) = \sin(\omega t)$ となるため, 極限操作が可換でない. 安定性を論じる際, 極限に対して閉じてないという性質は重要である.

3　ブロック線図とシステムの結合

複数のシステムからなる大きなシステムは, 各システム間の様々な結合によって表わされている. 結合の種類には, 並列結合, 直列結合, フィードバック結合の 3 種類があり, これらを組み合わせて用いられる (図 1). 安定な伝達関数による並列結合または直列結合した系は, 安

定となる．しかし，フィードバック結合に関しては，そのような関係が得られない場合がある．

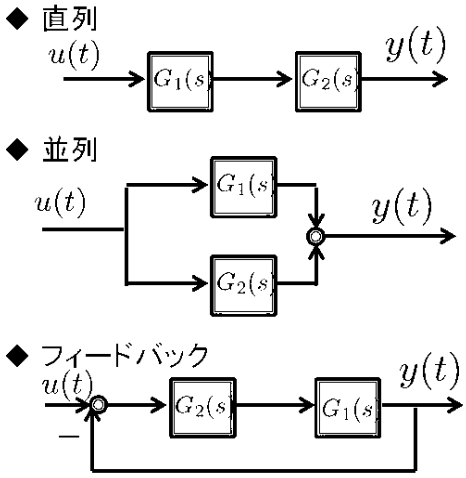

図 1　伝達関数 $G_1(s)$ と $G_2(s)$ の直列結合，並列結合およびフィードバック結合．

問題 10. $G_1(s) = \dfrac{1}{s+a}$, $G_2(s) = \dfrac{s-c}{s+b}$, $G_3(s) = \dfrac{1}{s^2+as+c}$ とする．ただし，$a, b, c, d > 0$, $a < c$ とする．

(1) $G_1(s)$ と $G_2(s)$ を直列結合したときの，伝達関数の極を求めよ．また，伝達関数が安定であるかどうかを判別せよ．

(2) $G_2(s)$ をフィードバック結合したときの，伝達関数の極を求めよ．また，伝達関数が安定であるかどうかを判別せよ．

一般に，伝達関数 $G_1(s)$ と $G_2(s)$ を直列結合，並列結合，フィードバック結合した場合，それぞれの伝達関数の安定性によって，結合後のシステムの安定性は表 1 となる．フィードバック結合の場合のみ，$G_1(s)$ と $G_2(s)$ の安定性がどうであっても，結合したシステムが安定であるかどうかは言えない．その代わり，フィードバック結合のみが不安定系を安定化する可能性を持っている．実際に，制御器に制約がなければ，安定化する制御器は必ず存在する[*8]．

表 1　直列結合/並列結合/FB 結合の安定性．安定を S, 不安定を U で表わす．

$G_1(s) \setminus G_2(s)$	S	U
S	S/S/?	U/U/?
U	U/U/?	U/U/?

4　Nyquist 線図と安定判別法

フィードバック結合による安定判別をグラフィカルに行う方法に，Nyquist の安定判別法と呼ばれるものがある．これは，**Nyquist 線図**と呼ばれるグラフをプロットすることで行われる．Nyquist 線図を用いたフィードバック系の安定判別法は，むだ時間の場合でも有効であり，盛んに用いられる方法の一つである．

Nyquist 線図とは，伝達関数 $G(s)$ の s を虚軸上で動かし，各 $s = j\omega$ に対し，$G(j\omega)$ の実部と虚部を複素平面にプロットする方法である．次の伝達関数

$$P(s) = \frac{s^2+2s+3}{s^3+3s^2+9s+2} \tag{6}$$

の Nyquist 線図を，図 6 で表わす．

問題 11. $G_1(s) = \dfrac{1}{s+a}$, $G_2(s) = \dfrac{s-c}{s+b}$, $G_3(s) = \dfrac{1}{s^2+as+c}$ とする．ただし，$a, b, c, d > 0$, $a < c$ とする．

(1) $G_1(s)$ の Nyquist 線図を描け．

(2) $G_2(s)$ の Nyquist 線図を描け．

(3) $G_3(s)$ の Nyquist 線図を描け．

ここで $G(s)$ をプロパな有理伝達関数としよう．Nyquist の安定判別法とは，図 3 のような

[*8] 線形システムが有理伝達関数で与えられている場合で，状態方程式で与えられた場合は異なる．

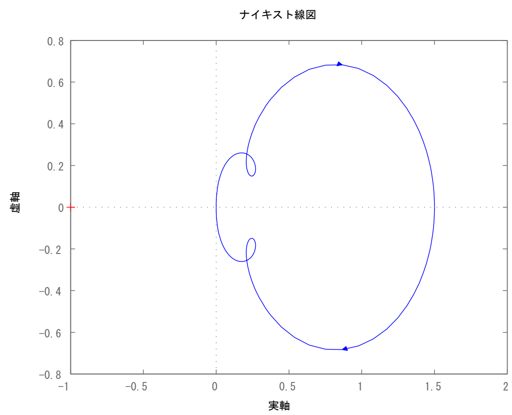

図 2　伝達関数 (6) の Nyquist 線図.

単一フィードバック結合の安定判別を行う方法である. $G(s)$ は安定でなくてもよいことに注意されたい. このとき, フィードバック結合により

$$\begin{aligned} Y(s) =& G(s)(U(s) - Y(s)) \\ =& G(s)U(s) - G(s)^2(U(s) - Y(s)) \\ =& \cdots = -\sum_{k=1}^{\infty}(-G(s))^k U(s) \end{aligned}$$

となる. ここで適当な s の領域が取れるとして

$$Y(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)}U(s)$$

を得る. このフィードバック系の安定性は, $F(s) = 1 + G(s)$ の "零点"に, 不安定零点が存在しないことが必要十分条件である.

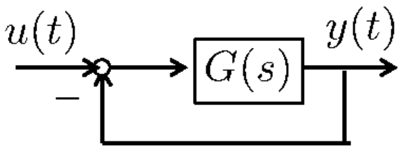

図 3　伝達関数 $G(s)$ の単一フィードバック結合.

安定性判別のために, 次の複素関数論の有用な結果を用いよう. 一般に有理関数 $f(s)$ に対し, **偏角の原理**と呼ばれる次の結果が成り立つ [2, 定理 6.9]: C を複素閉右半平面 $\mathbb{C}$ 内の区分的に連続微分可能な単純閉曲線であり, 反時計回りの方向に動くものとする. このとき, C の内側にある f の零点および極の個数を, 重複度も数えてそれぞれ N, P とする. また, f は C 上で零点を持たないとする. このとき,

$$P - N = -\int_C \frac{f'(s)}{f(s)}ds. \tag{7}$$

ここで $f'(s)$ は $f(s)$ の微分である. 証明は, 次のように行えばよい. $f(s)$ を, 互いに既約な分母多項式 $D(s)$ と分子多項式 $N(s)$ で表わし, 周回積分の中身を考えると,

$$\begin{aligned} f(s) =& \frac{N(s)}{D(s)} \\ \Rightarrow \frac{f'(s)}{f(s)} =& \frac{D(s)}{N(s)}\frac{N'(s)D(s) - N(s)D'(s)}{D(s)^2} \\ =& \frac{N'(s)}{N(s)} - \frac{D'(s)}{D(s)} \end{aligned}$$

と分解できる. 積分を変数変換し, $D(s)$ と $N(s)$ を変数とする 2 つの周回積分に分解する. ただし, 積分経路はそれぞれ $N(s)$ と $D(s)$ で移されたものとなる.

$$\begin{aligned} &\int_C \frac{1}{f(s)}\frac{d}{ds}f(s)ds \\ =& \int_{\Gamma_N}\frac{1}{N(s)}dN(s) - \int_{\Gamma_D}\frac{1}{D(s)}dD(s). \end{aligned}$$

右辺の周回積分の第一項は $f(s)$ の零点の数に一致し, 第二項は $f(s)$ の極の数と一致する.

次に式 (7) の意味について考えよう. これは, $f(s)$ によって積分曲線が C から Γ へ移されたと見なすこともできる:

$$\int_C \frac{f'(s)}{f(s)}ds = \int_\Gamma \frac{1}{f(s)}df(s).$$

上式の右辺は原点周りの回転数を表わしているので, パラメータ $f(s)$, $s \in C$ が原点を回る回

数を意味している．一方, 上式の左辺は,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f'(j\omega)}{f(j\omega)} d(j\omega) + \lim_{R\to\infty} \int_{\pi/2}^{-\pi/2} \frac{f'(Re^{j\theta})}{f(Re^{j\theta})} d\theta$$

であり, $f'(s)/f(s)$ は厳密にプロパな伝達関数となっているため, $R \to \infty$ の極限で右辺第二項は 0 となる．したがって, $f(s)$, $s \in C$ を動かして原点周りの回転数を調べることは, $f(j\omega)$, $\omega \in \mathbb{R}$ を $-\infty$ から $+\infty$ まで動かして, 原点周りの回転数を調べることに等しい．すなわち, $f(j\omega)$ を複素平面上で動かすことで, グラフィカルに安定性を判別することができる．

ここで安定性の議論に戻ろう．図 3 のフィードバック系を安定にするには, $F(s) = 1+G(s)$ に不安定零点が存在しないことが条件であった．すなわち, $F(j\omega)$ の軌跡が原点を回転した回数を M としたとき,

$$M = P$$

となることが条件である．$F(s)$ の極は, $G(s)$ の極と一致することに注意されたい．したがって, $F(s)$ の不安定極は, 事前に知ることができるので, 不安定極の数も調べることができる．これを $G(s) = F(s) - 1$ より, $F(j\omega)$ での原点 $F(j\omega) = 0$ は, $G(j\omega)$ では $(-1, j0)$ の点である．したがって, 次のようにまとめることができる．

Nyquist の安定定理

> $G(j\omega)$ を $-\infty$ から $+\infty$ まで ω を動かして描いた軌跡が, $(-1, j0)$ を $G(s)$ の不安定極の数だけ回転したとき, フィードバック系は安定である．

これが **Nyquist の安定定理**または **Nyquist の安定判別法**と呼ばれるものである．とくに $G(s)$ が安定ならば, $P = 0$ となるので, $G(j\omega)$ の軌跡が $(-1, j0)$ を回らない, すなわち $\mathrm{Re}(G(j\omega)) < 0$ の領域で軌跡が実軸に交わる点は, $(-1, j0)$ の右側であることが, フィードバック系の安定性を意味する．

5 Bode 線図と折れ線近似

線形時不変システムの伝達関数を虚軸上でプロットすることで, システムの定常特性を知ることができる．システムが不安定の場合, 定常特性を議論することに意味がないため, システムは安定であるとする．このとき, 次のようなグラフを作成する．

- Bode ゲイン線図： 横軸に $\omega > 0$, 縦軸に $10\log_{10}|G(j\omega)|^2$ をプロットし, 片対数表示したもの．
- Bode 位相線図： 横軸に $\omega > 0$, 縦軸に $\angle G(j\omega)$ をプロットし, 片対数表示したもの．ただし, 縦軸は慣習的に度数単位で表わす．

これら 2 つのグラフを, **Bode 線図**という．例えば, 式 (6)

$$P(s) = \frac{s^2 + 2s + 3}{s^3 + 3s^2 + 9s + 2}$$

の Bode 線図は, 図 4 の通りである (Matlab で以下のコマンドで生成した).

```
num=[1, 2, 3]; % 分子多項式係数
den=[1, 3, 9, 2];% 分母多項式
P=tf(num,den);% 伝達関数の生成
roots(den) % 分母多項式の根の表示
bode(P);% Bode 線図のプロット
w=10.^[-1:0.1:2];% プロットしたい角周波数帯域の設定
[gain,phase]=bode(P,w);% w におけるゲインと位相
gain=squeeze(gain);
phase=squeeze(phase);% 3 次元配列データ
```

を 1 次元配列データに収縮

`nyquist(P);% Nyquist 線図の表示`

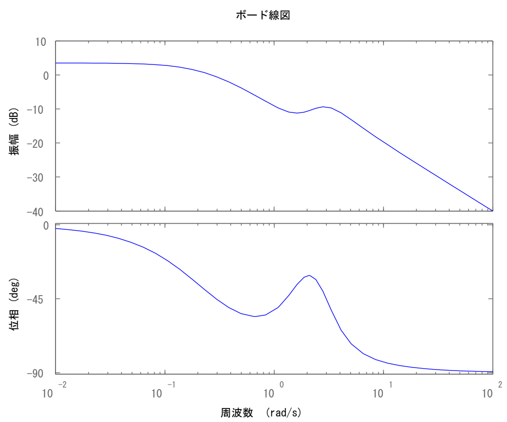

図 4　伝達関数 (6) の Bode ゲイン線図と位相線図

対数をとる際, 注意しなければならない点がある. 入力が電圧, 出力が角速度というふうに, 実際のシステムでは入力と出力の単位が同じであるとは限らない. その場合, 伝達関数 G は無次元量にはならず, 対数関数の引数に選ぶことができない[*9]. このような場合, 無次元量となるように, 適当な規格化定数で割ったものと考え, 対数の値を出す. 用いた規格化定数によって対数関数の値は異なってしまうが, グラフの概形は変わらないことに注意されたい.

$G(s) = \frac{1}{(s+a)(s+b)}$, $a, b > 0$ を考えよう. このとき,

$$\log_{10}|G(j\omega)| = \log_{10}\frac{1}{|j\omega+a|} + \log_{10}\frac{1}{|j\omega+b|}$$

と分解することができる. また, $G(j\omega) = |G(j\omega)|\exp(j\angle G(j\omega))$ となるため,

$$\angle G(j\omega) = \angle\frac{1}{j\omega+a} + \angle\frac{1}{j\omega+b}$$

と分解することができる. すなわち, 伝達関数が 1 次系の積の形で表わされているとき, Bode 線図は各 1 次系のプロットの和で表わすことができる.

1 次系と 2 次系の伝達関数の Bode 線図の特徴を述べておく. 次の伝達関数を考える.

$$G_1(s) = \frac{1}{s+a}, \quad G_2(s) = \frac{1}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}.$$

ただし, $a, \zeta, \omega_0 > 0$. まず 1 次系は, 次の特徴がある.

(1) $\omega \to 0$ で $|G_1(j\omega)| \to \frac{1}{a}$ となり, $\angle G_1(j\omega) \to 0$ となる.

(2) $\omega = a$ で,

$$\begin{aligned} &|G_1(ja)| \sim \frac{1}{2a} \\ \Leftrightarrow &20\log_{10}|G_1(ja)| \simeq -3 - 20\log_{10} a. \end{aligned}$$

実際に応用される現場において, 右辺の -3dB は特別な意味な意味をもつ (下の問題参照). また, 位相は $\angle G_1(ja) = -45°$.

(3) $\omega \gg a$ で $|G_1(j\omega)| \to \frac{1}{\omega}$, すなわち

$$20\log_{10}|G_1(j\omega)| \simeq -20\log\omega$$

となり, 片対数グラフにおいて線形に減衰する. また, $\angle G_1(ja) = -90°$.

以上を踏まえると, $\omega < a$ の領域では $\frac{1}{a}$ をとり, $\omega > a$ の領域では点 $(a, \frac{1}{a})$ を通る傾き -20 の直線を引けば, ゲイン線図の近似になることが予想される. この方法で Bode ゲイン線図を描くことを, 折れ線近似法という.

2 次系において, $\zeta \geq 1$ の場合は 1 次系の積に分解される. $0 < \zeta < 1$ の場合のみを考えよう.

(1) $\omega \to 0$ で $|G_1(j\omega)| \to \frac{1}{a}$

[*9] 単位を考える必要があるのは, 数学と応用分野の違いの一つ

(2) $\omega = a$ で,

$$\begin{aligned} &|G_1(ja)| \sim \frac{1}{2a} \\ \Leftrightarrow &20\log_{10}|G_1(ja)| \simeq -3 - 20\log_{10} a. \end{aligned}$$

実際に応用される現場において, 右辺の -3dB は特別な意味な意味をもつ (下の問題参照).

(3) $\omega \gg a$ で $|G_1(j\omega)| \to \frac{1}{\omega}$, すなわち

$$20\log_{10}|G_1(j\omega)| \simeq -20\log\omega$$

となり, 片対数グラフにおいて線形に減衰する.

問題 12. (1) $G(s) = \dfrac{1}{s+a}$, $a > 0$ の Bode 線図の概形を図示せよ. 伝達関数 $|G(j\omega)|^2 = |Y(j\omega)|^2/|U(j\omega)|^2$ より, 入出力信号のパワーの比となっている. パワーの比が $|G(j0)|^2$ の半分となる角周波数を求めよ (パワーが半分になる周波数帯域は, 通信ではバンド幅と呼ばれる).

(2) $G(s) = \dfrac{1}{s^2+4s+3}$ の Bode 線図の概形を図示せよ.

(3) $G(s) = \dfrac{s+1}{s^2+4s+3}$ の Bode 線図の概形を図示せよ.

(4) $G(s) = \dfrac{1}{s^2+s+1}$ の Bode 線図の概形を図示せよ.

(5) $G(s) = \dfrac{s-a}{s+a}$, $a > 0$ の Bode 線図の概形を図示せよ.

(6) $G(s) = e^{-sT}$, $T > 0$ は, むだ時間を表わす. これを次のように近似する (N 次の Pade 近似).

$$e^{-sT} = \frac{e^{-sT/2}}{e^{sT/2}} \simeq \frac{\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{k!}\left(-\frac{T}{2}s\right)^k}{\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{k!}\left(\frac{T}{2}s\right)^k}$$

$N = 1$ のときと $N = 2$ のときの Bode ゲイン線図と位相線図を図示せよ. Pade 近似は, むだ時間のどの周波数帯域を近似したものか?

Bode 線図は, 安定な制御系に対する周波数領域における性能評価を行うために用いられる. 安定判別は, 前述の Routh–Hurwitz の安定判別法や, Nyquist の安定判別法を用いて判別することができる.

参考文献

[1] 片山徹. フィードバック制御の基礎. 朝倉書店, 2005.

[2] 新井朝雄. 複素解析とその応用. 共立出版, 2006.