システム工学実験 資料–5
安定化制御器とその設計法

数理工学コース 制御システム論分野 大木

2016 年 11 月 29 日

概要

制御の目的は, 大まかに言って次の 2 つである.

- **望ましい性質 (制御仕様または制御性能) を満たすこと.**
- **安定に動作させること.**

「望ましい性質」とは, 制御系の設計者が設定する性質で, 速応性であったり実際にかかる費用であったりと様々であり, 物理学や数学をベースとした制御理論だけで決められるものではない[*1]. 一方, 制御理論では, 制御対象を安定化する制御器 (**安定化制御器**もしくは**安定化補償器**という) の研究が古くから行われており, 与えられた数理モデルに対して設計者の意図を意識せずに求めることができる[*2]. とくに線形系に対しては, どのようにして安定化可能な制御器を作成できるかが分かっている.

本稿では, まず制御器を作成する際に注意しなければならない, **不安定な極零相殺**の影響について述べる. なぜ安定化のためにフィードバック制御が大事かを, 極零相殺を通して説明する. 次に**極配置法**を導入し, 与えられた制御対象を安定化する制御器が存在することを示し, その設計法にも触れる. また, **Youla パラメトリゼーション**と呼ばれる方法で安定化制御器の特徴付けを学ぶ. Youla パラメトリゼーションとは, 制御器の代数的性質を用いた安定化制御器の特徴付けであり, 例えば 1 つ安定化補償器が見つかれば, それを基にして制御対象を安定化する全ての制御器を比較的簡単に見つけられる. 制御性能や制御仕様を達成するためには, 安定化制御器の中から制御器を探さなければならないため, 安定化制御は制御の最も基本的な部分である. 以上までが安定化制御器の設計に関するものであるが, 3 節以降では, 安定性に加えて制御仕様を与え, それを満たす制御器の設計法について述べる. 線形系の安定化制御のポイントは, 任意の初期応答を零にするという意味で制御器を設計している. これに対し, 実際の制御系では, 所望の動作を行うことが要求される. そのため, 制御系に理想的な動作, すなわち目標軌道への追従をさせねばならないが, 3 節では**追従制御**の方法論について述べる. この節では，簡単な性能評価の指針として，追従誤差の測り方や，外乱の出力への悪影響の測り方の一例も紹介する．また, 4 節ではフィー

[*1] 現場でよく用いられる制御仕様や, 理論的に扱いやすい制御仕様に関しては, それを満たす制御器の設計法についての研究が多くなされている.

[*2] 数理モデルの作り方については，ここでは言及しない．実際には天から降ってくる数理モデルなどないため，数理モデルを作ることから始めなければならないし，そこで行いたい制御を意識したモデル作りが行われる．

ドバック制御とフィードフォワード制御を同時に用いる, **2 自由度制御**についても述べる．これは安定性をフィードバック制御で保証し, 性能をフィードフォワード制御によって達成するもので, 2 つの性格の異なる制御方法を併用することで制御性能を向上させる方法である.

3 節で述べる評価指標を使って，最適制御およびロバスト最適制御と呼ばれる制御器を設計することができる．これらについては，稿を改めて説明する．

1　安定化制御と極配置法

制御対象が与えられたとき, それを安定化する制御器が存在すれば, その制御器を**安定化制御器 (stabilizing controller)** もしくは**安定化補償器 (stabilizing compensator)** という．例えば,

$$P(s) = \frac{1}{s^2 - 3s + 2} = \frac{1}{(s-2)(s-1)} \tag{1}$$

は比例制御器によるフィードバック制御では安定化できないが, PD 制御器によるフィードバック制御では安定化できる．これらは具体的に制御器を構成し, その安定化可能性を確認して分かるが,「制御器が PID 制御器でなければならない」などの制約やこだわりがなければ, 制御器も動的システムにすることで閉ループ系を安定化する制御器を構成することができる．ただし, 以下で注意するように, 制御器を作る際には "極零相殺" に注意が必要である．

1.1　不安定な極零相殺

図 1 のようなフィードバック制御系を考える．ここで $P(s)$ は対象系の伝達関数, $C(s)$ は制御器の伝達関数, $H(s)$ はセンサの伝達関数を表わす．測定できる信号は出力 $y(t)$ であり, $d(t)$ は外乱入力, $r(t)$ は参照入力 (目標値入力), $r_2(t)$ はセンサ雑音を表わす．本稿では外乱入力とセンサ雑音は零とする．

極零相殺 (pole zero cancellation) とは, システムの伝達関数の極と制御器の伝達関数の零点が一致する場合, 伝達関数の積を取ることで, 見かけ上, 極が消えてしまうことをいう．例えば

$$P(s) = \frac{1}{s-1.1},\ C(s) = \frac{s-1.1}{s+1}$$

という組み合わせを考えたとき, $P(s)C(s) = \frac{1}{s+1}$ となることである．このように定めた制御器は一見何の問題もなく，良さそうにみえるが，$P(s)$ や $C(s)$ のパラメータが "完全に" 分かっていることは現実的な設定ではありえず, $P(s)C(s) = \frac{s-1.1+\epsilon_1}{(s-1.1+\epsilon_2)(s+1+\epsilon_3)}$ となってしまう(*3．したがって, このフィードバック系は安定性を保証できない．極零相殺の問題点は，このように指摘されることも多く，現実的な理由としてはこの説明で十分である．しかし，理論的にも初期値応答を考えると仮に厳密にパラメータが分かっていても問題が生じることを, 以下の問題を通して述べておく．

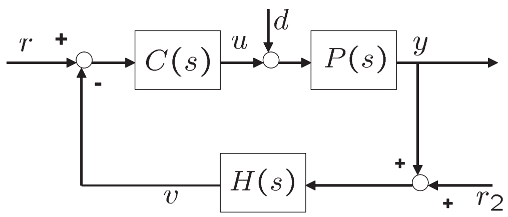

図 1　フィードバック制御系 [1]．$P(s)$ は対象系の伝達関数, $C(s)$ は制御器の伝達関数, $H(s)$ はセンサの伝達関数を表わす．測定できる信号は出力 $y(t)$ であり, $d(t)$ は外乱入力, $r(t)$ は参照入力 (目標値入力), $r_2(t)$ はセンサ雑音を表わす．特に断らない限り, 本節では $H(s) = 1$ と固定する．

問題 1. 制御対象 (1) を, 同じ次数をもつ制

(*3　もちろん，数値誤差も許されない．

御器

$$C(s)=\frac{\beta_2 s^2+\beta_1 s+\beta_0}{s^2+\alpha_1 s+\alpha_0}$$

で制御することを考える.

(1) 図 1 の閉ループ系で $H(s)=0$ とし, 次のように制御器を作ったとする.

$$C(s)=\frac{s^2-3s+2}{(s+1)^2}$$

$d(s)=0$ ならば制御器は安定化制御器となりそうだが, 実際にはそうはならない.

(a) 制御対象 (1) は,

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t)-3\frac{d}{dt}y(t)+y(t)=u(t)$$

という式で記述されるシステムであり, その Laplace 変換が

$$\begin{aligned}Y(s)=&\frac{sy(0)+\frac{d}{dt}y(0)-3y(0)}{s^2-3s+2}\\&+\frac{1}{s^2-3s+2}U(s)\end{aligned}$$

で与えられることを確認せよ.

(b) フィードフォワード制御入力

$$U(s)=C(s)R(s)$$

としたとき, 出力

$$\begin{aligned}Y(s)=&\frac{sy(0)+\frac{d}{dt}y(0)-3y(0)}{s^2-3s+2}\\&+\frac{1}{(s+1)^2}R(s)\end{aligned}$$

は, 有限個の点を除いた初期値において発散することを示せ.

(2) 図 1 の閉ループ系で $H(s)=1$ とし, 次のように制御器を作ったとする.

$$C(s)=\frac{s^2-3s+2}{(s+1)^2}.$$

このとき, 出力は

$$\begin{aligned}Y(s)=&\frac{P(s)(sy(0)+\frac{d}{dt}y(0)-3y(0))}{1+P(s)C(s)}\\=&\frac{(s+1)^2}{(s+1)^2+1}\\&\times\frac{sy(0)+\frac{d}{dt}y(0)-3y(0)}{s^2-3s+2}\end{aligned}$$

となり, 出力が発散することを示せ.

(3) 図 1 の閉ループ系で $H(s)=1$ とし, 次のように制御器を作ったとする.

$$C(s)=\frac{\beta_1 s+\beta_0}{s^2+\alpha_1 s+\alpha_0}=\frac{\gamma(s)}{\delta(s)}.$$

ただし, $C(s)$ の零点は $P(s)$ の極とは一致しないとする. このとき, 出力は

$$\begin{aligned}Y(s)=&\frac{P(s)(sy(0)+\frac{d}{dt}y(0)-3y(0))}{1+P(s)C(s)}\\=&\frac{\delta(s)(sy(0)+\frac{d}{dt}y(0)-3y(0))}{\delta(s)(s-1)(s-2)+\gamma(s)}\end{aligned}$$

となることを確認せよ. このとき, 閉ループ系の安定性は, $\alpha(s)(s-1)(s-2)+\beta(s)$ の根の実部が厳密に負になればよい. 閉ループ系を安定化するパラメータ α_1, α_0, β_1, β_0 を求めよ.

(4) 図 1 の閉ループ系で $H(s)=1$ とし, 次のように制御器を作ったとする.

$$C(s)=\frac{\beta_1 s+\beta_0}{s^2+\alpha_1 s+\alpha_0}=\frac{\gamma(s)}{\delta(s)}.$$

また, 出力 $y(t)$ がなるべく早く減衰するように, 閉ループ系の極を p_i を指定したい. すなわち,

$$\begin{aligned}&(s+p_1)(s+p_2)(s+p_3)(s+p_4)\\=&\gamma(s)(s-1)(s-2)+\delta(s)\end{aligned}$$

が成り立つように, パラメータ α_1, α_0, β_1, β_0 を求めよ.

問題で扱ったように, 制御対象と制御器の間に極零相殺があると, フィードバック制御で安定化することができない. 一般的な有理伝達関数の場合で確認しよう. 制御対象の伝達関数を $P(s)$ とし, それを次のように分母多項式と分子多項式の比で表わす.

$$P(s) = \frac{b_n s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \cdots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0} = \frac{n(s)}{d(s)} \tag{2}$$

で表し, 制御器も同様に

$$C(s) = \frac{\beta_n s^n + \beta_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \beta_0}{s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_0} = \frac{\gamma(s)}{\delta(s)} \tag{3}$$

で表す. 厳密にプロパな伝達関数を考えるのであれば, $b_n = 0$, $\beta_n = 0$ と置けばよい. 制御対象のシステムは次の微分方程式で記述される.

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k}{dt^k} y(t) = \sum_{k=0}^{n} b_k \frac{d^k}{dt^k} u(t)$$

これを Laplace 変換して整理すると,

$$Y(s) = P(s)U(s) + \frac{1}{d(s)} f_p(s)$$

である. ただし, 初期値に関する項をまとめて $f_p(s)$ と置いた. 一方, 制御器のシステムも同様に求めると,

$$U(s) = -C(s)Y(s) - \frac{1}{\delta(s)} f_c(s)$$

となる. したがって,

$$Y(s) = \frac{1}{1 + P(s)C(s)} \left(\frac{f_p(s)}{d(s)} - \frac{f_c(s)}{\delta(s)} \right) \tag{4}$$

となり, $P(s)$ と $C(s)$ の間に不安定な極の極零相殺が起こると, 初期値応答に対して不安定極が残ってしまうため, 発散する. 極零相殺のない閉ループ系は

$$Y(s) = \frac{\delta(s) f_p(s) - d(s) f_c(s)}{\delta(s)d(s) + \gamma(s)n(s)} \tag{5}$$

と, 初期値の関数として表すことができ, かつ安定性の問題は初期値に独立となる.

以上から分かるように, フィードバックによる制御対象の安定化は, 制御対象のもっている不安定極自身で相殺することにより達成される. これがフィードフォワード制御にはない, フィードバック制御のもつ特徴である.

問題 2 (漸近的な極零相殺)**.** 図 1 の閉ループ系で $H(s) = 1$ とし, 制御対象と制御器を次のように仮定する.

$$P(s) = \frac{1}{s-1}, \ C_n(s) = \frac{s - (1 + \frac{1}{n})}{s+1}$$

ただし, $n = 1, 2, \cdots$.

(1) 各 n に対し, 閉ループ伝達関数の極を求めよ.
(2) 各 n に対し, 閉ループ伝達関数を部分分数展開せよ.
(3) 各 n に対してインパルス応答を求めよ. また, n を大きくするとインパルス応答がどのように変化するか, 考察せよ.

1.2 有理伝達関数の極配置法

極零相殺は, 安定化制御器の設計のための必要条件である. したがって, それをクリアしたからといって安定化制御器が作れるとは限らない. しかし, とくに制御入力に制約がない場合, 一般のプロパな有理伝達関数にも, それを安定化する制御器が必ず存在することが知られている[*4]. 安定化制御器を作成するための 1 つの手段として, ここでは**極配置法 (pole assignment)** を取り上げる. 極配置とは, 閉ループ伝達関数の極を指定し, それを達成するように制御器を作成する方法である.

[*4] 現代制御論の言葉でいえば, これは伝達関数がシステムの可制御可観測な部分を扱っているためである.

制御対象と制御器の伝達関数をそれぞれ $P(s)$, $C(s)$ とし, 式 (2), (3) で表わす．厳密にプロパな伝達関数を考えるのであれば, 分子多項式の係数 $b_n = 0$ と置けばよい．$P(s)$ と $C(s)$ の間には, 不安定な極零相殺は生じないと仮定する．このとき, 閉ループ伝達関数は

$$\frac{1}{1+P(s)C(s)} = \frac{d(s)\delta(s)}{d(s)\delta(s)+n(s)\gamma(s)} \quad (6)$$

となり, 安定性は閉ループ伝達関数の分母多項式の根によって決まる.

$$\begin{aligned} & d(s)\delta(s)+n(s)\gamma(s) \\ &= \sum_{k_1,k_2=0}^{n} s^{k_1+k_2}(a_{k_1}\alpha_{k_2}+b_{k_1}\beta_{k_2}) \\ &= \sum_{m=0}^{2n} s^m \sum_{k=0}^{m}(a_k\alpha_{m-k}+b_k\beta_{m-k}). \end{aligned}$$

ただし, $k \geq n+1$ で $\alpha_k = \beta_k = a_k = b_k = 0$ とする．一方, 閉ループ系の分母多項式を次のように仮定する:

$$\sum_{m=0}^{2n} s^m q_m.$$

ただし, $q_{2n} = 1$ とし, この根は安定であるとする[*5]. したがって, $m = 0, 1, \cdots, 2n$ に対して

$$q_m = \sum_{k=0}^{m}(a_k\alpha_{m-k}+b_k\beta_{m-k}) \quad (7)$$

が成り立つようにパラメータ α_k, β_k を決定すればよい. 例えば

$$P(s) = \frac{1}{s+1},\ C(s) = \frac{\beta_1 s+\beta_0}{s+\alpha_0} \quad (8)$$

に対して閉ループ系の分母多項式が $(s+4)(s+2) = s^2+6s+8$ となるように制御器のパラメータを決めるには,

$$\begin{aligned} & s^2+6s+8 = s^2+(1+\alpha_0+\beta_1)s+\alpha_0+\beta_0 \\ & \Rightarrow \quad \forall\beta_1 \in \mathbb{R},\ \alpha_0 = 7-\beta_1,\ \beta_0 = 1+\beta_1 \end{aligned}$$

とすればよいことになる．ここで β_1 は自由パラメータとなる.

問題 3. 式 (8) の制御対象と制御器が与えられているとする．このとき, 次の問題に答えよ.

(1) 閉ループ系の極が $\{-1 \pm 2\mathrm{i}\}$ となるように, 制御器のパラメータを求めよ．ただし $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$.

(2) 閉ループ系の極が $\{-1, -5\}$ となるように, 制御器のパラメータを求めよ.

(3) 閉ループ系の極が $\{1, 5\}$ となるように, 制御器のパラメータを求めよ.

$\alpha_n = 1$ に注意すると, 未知パラメータ $\{\alpha_i\}_{i=0}^{n-1}$, $\{\beta_j\}_{j=0}^{n}$ を求めるためには次の代数

[*5] 不安定な極を指定することもできるが, ここでは安定化のみを考える．また, 考えている問題は配置したい極 p_k, $k = 1, 2, \cdots, 2n$ を用いて $\prod_{k=1}^{2n}(s+p_k) = \sum_{m=0}^{2n} q_m s^m$ であるので, $q_{2n} = 1$ と置いても一般性を失わない.

方程式を解けばよい.

$$
\begin{bmatrix} q_0 \\ \vdots \\ q_{n-1} \\ q_n - a_0 \\ \vdots \\ q_{2n-1} - a_{n-1} \\ q_{2n} - a_n \end{bmatrix}
= \begin{bmatrix} a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & a_0 & \ddots & \\ \vdots & & & 0 \\ a_{n-1} & \cdots & \cdots & a_0 \\ a_n & \cdots & \cdots & a_1 \\ 0 & a_n & \cdots & a_2 \\ \vdots & & & \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \\ 0 & \cdots & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \end{bmatrix}
+ \begin{bmatrix} b_0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_1 & b_0 & \ddots & \\ \vdots & & & 0 \\ b_n & \cdots & \cdots & b_0 \\ 0 & b_n & \cdots & b_1 \\ \vdots & & & \\ 0 & \cdots & 0 & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} \tag{9}
$$

さらに $q_{2n} = a_n = 1$ であるので, 一般性を失わず $\beta_n = 0$ と置いてよい. このとき, 式 (9) は, 次のようになる.

$$
\begin{bmatrix} q_0 \\ \vdots \\ q_{n-1} \\ q_n - a_0 \\ \vdots \\ q_{2n-1} - a_{n-1} \end{bmatrix}
= \begin{bmatrix} a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & a_0 & \ddots & \\ \vdots & & & 0 \\ a_{n-1} & \cdots & \cdots & a_0 \\ a_n & \cdots & \cdots & a_1 \\ 0 & a_n & \cdots & a_2 \\ \vdots & & & \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \end{bmatrix}
+ \begin{bmatrix} b_0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_1 & b_0 & \ddots & \\ \vdots & & & 0 \\ b_n & \cdots & \cdots & b_0 \\ 0 & b_n & \cdots & b_1 \\ \vdots & & & \\ 0 & \cdots & 0 & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix}
= \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{\alpha} \\ \vec{\beta} \end{bmatrix} \tag{10}
$$

ここで $A, B \in \mathbb{R}^{2n\times n}$, $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in \mathbb{R}^n$ である. したがって, $\vec{\alpha}$ と $\vec{\beta}$ を求める問題は, 行列 $[A,\ B] \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$ の正則性を調べることに帰着する. 行列 $[A,\ B] \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$ が正則ならば,

$$
\begin{bmatrix} \vec{\alpha} \\ \vec{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A, & B \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_n - a_0 \\ q_{n+1} - a_1 \\ \vdots \\ q_{2n-1} - a_{n-1} \end{bmatrix}
$$

により, 閉ループ系の極を指定した制御器が構成できる. $[A,\ B]$ の正則性は, 既約な有理関数

で表わされている伝達関数であれば, 実はいつでも成り立つ．証明はしないが, このことを例題を通して調べてみよう．

問題 4. 以下の問で与えられる伝達関数に対し, 式 (10) の行列 A, B を求め, 行列 $[A, B]$ の正則性を調べよ．伝達関数が約分できる場合でも, 約分はしないこと．

(1) $P(s) = \dfrac{s}{s(s-1)}$.
(2) $P(s) = \dfrac{s-1}{s(s-1)}$.
(3) $P(s) = \dfrac{1}{s-1}$.
(4) $P(s) = \dfrac{1}{s}$.
(5) $P(s) = \dfrac{s+2}{s^2}$.

約分できる場合, すなわち可約な有理関数で表わされている場合は, 行列 $[A,\ B]$ が正則にならないことが分かると思う．以上の知識で, 極配置法を実際に行うことができる．

問題 5 (極配置法)**.** 図 1 の閉ループ系で $H(s) = 1$ とする．このとき, 以下の問で与えられる制御対象の伝達関数に対し, 閉ループ系が指定された極をもつように, 制御器を作成せよ．

(1) 制御対象と閉ループ系の極を以下のようにする．

$$P(s) = \frac{1}{s-1},\ (p_1, p_2) = (-1, -1)$$

これを達成する制御器を求めよ．

(2) 制御対象と閉ループ系の極を以下のようにする．

$$P(s) = \frac{s-1}{s+1},\ (p_1, p_2) = (-1, -1)$$

これを達成する制御器を求めよ．

2　安定化制御器のクラス

極配置法を知っていれば, 安定化制御器を作ることが可能である．しかし，設計した制御器によって思うような制御性能が得られなかった場合，また作り直すのも面倒である．1 つの制御器が分かれば，それを基に制御対象を安定化する制御器を構成できれば，素朴には嬉しいであろう．実際，安定化制御器を 1 つ求められれば, それを元に制御対象を安定化する制御器の全てを求める方法があり, それを制御器の **Youla パラメトリゼーション**という．制御器と制御対象の役割を変えれば, これは与えられた制御器で安定化可能な制御対象の集合を求めることと等価であり, 制御対象の集合を制御する理論であるロバスト制御とも関係する．本節では, 安定化制御器のクラスに着目し, Youla パラメトリゼーションを概説する．

Youla パラメトリゼーションとは, 代数学を用いた制御器の特徴付けのことである．その説明には，代数学の用語を使ったほうが便利であるので，少しだけ触れておこう．ある性質を満たす集合に対して, 演算 (例えば和や積) を施してもその性質を保つとき, 集合は演算に対して閉じているという．例えば, 自然数は和と積に関して閉じており, 商演算 (割り算) や差には閉じてない．また, 有理数は和，差，積および商の四則演算に対して閉じており, 実数のスカラー倍には閉じてない(*6．実数は四則演算に関して閉じており, 実スカラー倍にも閉じている．粗い言い方ではあるが, 和と積に関して閉じている集合を**環 (ring)** といい, 環がスカラー倍に関して閉じているとき, 多元環もしくは**代数**

(*6　ここでは実数の集合をスカラーとして扱っているが，これも拡張できる概念であるので，より正確な定義は適当な文献を参照されたい (例えば [])．本稿では，実スカラー倍しか用いない．

(algebra) という．整数や有理数は環であるが代数ではなく，実数は代数である．この概念を方程式にも拡張して考え，集合全体の特徴づけを利用することで，安定化可能な制御器を構成することができる．

伝達関数は, プロパーな実有理関数であり(*7, 並列結合および直列結合を行ってもプロパーな実有理関数である(*8．特に 2 つの任意の安定な伝達関数に対し, 並列結合と直列結合は安定性を変えない．並列結合は和，直列結合は積という演算とみなせるので, 安定な伝達関数の全体からなる集合 $\mathcal{S}$ は，環である(*9．すなわち, $G, H \in \mathcal{S}$ ならば, $G + H \in \mathcal{S}$, $GH \in \mathcal{S}$ である．この性質は, 入出力数が等しい伝達関数行列 (正方行列) に対していつでも成り立つ．入出力数が異なる場合には積が定義できないが, 既約分解という手法を用いることで，安定な正方行列値の伝達関数の集合を考えることができる．以下では 1 入力 1 出力系を考えるが, 多入力多出力系に関しては, 適当な参考文献を参照されたい（例えば [2,3]）．

2.1 既約分解と安定化制御器

次のプラントを考える.

$$P(s) = \frac{s+2}{(s-1)(s+3)} \tag{11}$$

このプラントは, 次のように, 安定な 2 つの伝達関数の比で表わすことができる.

$$\begin{aligned} P(s) =& \frac{N_p(s)}{D_p(s)}, \\ N_p(s) =& \frac{s+2}{(s+a)^2},\ D_p(s) = \frac{(s-1)(s+3)}{(s+a)^2} \end{aligned} \tag{12}$$

ここで $a > 0$ である．$D_p(s)$ は安定かつバイプロパー, $N_p(s)$ は安定かつプロパで, それぞれ同じ極を持っていれば何でもよい (それぞれ制御器を求めるための仮想的なシステムであるため)．重根の形式にしているのは, 計算が楽になるという理由からなので, 分母多項式と同じ次数をもつ安定な多項式ならば何でもよい．ただし, 既約な有理関数にする必要がある．与えられた伝達関数 $P(s)$ をこのように分解することを, P の $\mathcal{S}$ 上の**既約分解 (coprime factorization)** という.

このシステムに対し, フィードバック制御によって閉ループ系を安定化することを考える. 制御器 $C(s)$ も同じく安定かつプロパ (分母有理関数はバイプロパ)

$$C(s) = \frac{N_c(s)}{D_c(s)}$$

の形で表わすと, 閉ループ伝達関数は次のようになる.

$$\begin{aligned} G(s) =& \frac{C(s)P(s)}{1 + C(s)P(s)} \\ =& \frac{N_c(s)N_p(s)}{D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)}. \end{aligned}$$

したがって, 閉ループ系の安定性は,

$$H(s) := D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)$$

としたとき, $D_c(s)N_p(s)$ と $N_c(s)N_p(s)$ が同じ分母多項式を持つので，$H^{-1} \in \mathcal{S}$ になるか

(*7 本稿では，有理関数で表せない伝達関数は考えない.

(*8 伝達関数は, 既約なもののみを扱う．既約とは, 分母と分子の多項式が同じ根を持たない, という意味である.

(*9 正確な環の定義は, 加法に関して可換群であり, 乗法に関してモノイドであること（定義は「代数系」,「環論」の本には載っている）．以下の議論では, 和と積に関して閉じていることが重要なので, 細かい定義は気にしなくてもよい.

否かで決まる．$D_c, D_p, N_c, N_p \in \mathcal{S}$ なので, 環の性質から $H \in \mathcal{S}$ である(*10.

$H, H^{-1} \in \mathcal{S}$ となる $H(s)$ は, **ユニモジュラ (unimodular)** あるいは**単元**と呼ばれる(*11. ここでは伝達関数を考えているので, ユニモジュラは, バイプロパかつ不安定極および不安定零点を持たない伝達関数と言い直すことができる．最も単純なユニモジュラは $H(s) = 1$ である．このとき,

$$D_p(s)D_c(s) + N_c(s)N_p(s) = 1 \tag{13}$$

となる制御器を求めればよい．もちろん, 右辺はユニモジュラな伝達関数ならば何でもよいが, そのような場合も式 (13) に帰着される(*12．式 (13) を, **Bezout 恒等式 (Bezout identity)** という．Bezout 恒等式を満たす $D_c, N_c \in \mathcal{S}$ は存在することが知られているので [2, 4 章], 任意の制御対象 $P(s)$ に対して, 閉ループ系を安定化する制御器 $C(s)$ は必ず存在する．例えば，$P(s) = \frac{1}{s+2}$, $C(s) = 1$ のとき，$N_p(s)$, $D_p(s)$, $N_c(s)$, $D_c(s)$ の組を 1 つ求めてみる．手がかりとして，次のように $a, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ で特徴付けた伝達関数を考える．

$$N_p(s) = \frac{1}{s+a},\ D_p(s) = \frac{s+2}{s+a}$$
$$N_c(s) = \frac{s+\beta}{s+\alpha},\ D_c(s) = \frac{s+\beta}{s+\alpha}$$

(*10 バイプロパな伝達関数とプロパな伝達関数の和は, バイプロパになることに注意されたい.

(*11 例えば, $x \in \mathbb{R}$ かつ $x \neq 0$ はユニモジュラである．n 次正方行列の集合 $\mathbb{C}^{n\times n}$ のある正方行列が正則行列であれば, やはりユニモジュラであるという. 考えている集合の性質によって, 何をユニモジュラと呼ぶのかは異なってくる.

(*12 $W(s)$ をユニモジュラとし, $D_p(s)D_c(s) + N_c(s)N_p(s) = W(s)$ とするならば, 両辺を $W(s)$ で割り, $D_c'(s) := D_c(s)W(s)^{-1}$, $N_c'(s) := N_c(s)W(s)^{-1}$ と改めておけばよい.

ここで

$$\begin{aligned} &N_p(s)N_c(s) + D_c(s)D_p(s) \\ =&\frac{(s+3)(s+\beta)}{(s+a)(s+\alpha)} = 1 \end{aligned}$$

を満たすには,

$$a = 3, \quad \alpha = \beta$$

とすればよい．したがって, $N_p(s) = 1/(s+3)$, $D_p(s) = (s+2)/(s+3)$, $N_c(s) = D_c(s) = 1$ である．

残る問題は, 安定化制御器の具体的な形をどのようにして求めるかという問題である.

問題 6. 制御対象 (11) は, 式 (12) の $D_p(s)$, $N_p(s)$ で表わされているものとする.

(1) $D_c(s) = \frac{s+\beta}{s+\alpha}$, $N_c(s) = \frac{\gamma}{s+\alpha}$, $\alpha > 0$, $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ とする．このとき, 式 (13) を α, β, γ について解き, 閉ループ系を安定化する制御器を求めよ．ただし $a = 10$ とする.

(2) $D_c(s) = \frac{s+\beta}{s+\alpha}$, $N_c(s) = \frac{\gamma}{s+\alpha}$, $\alpha > 0$, $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ とする．$a = 1$ としたとき, 式 (13) を満たすパラメータ $\alpha > 0$ が存在しないことを確認せよ.

(3) $D_c(s) = \frac{s^2+\beta s+\gamma}{(s+a)^2}$, $N_c(s) = \frac{s^2+\delta s+\epsilon}{(s+a)^2}$, $\beta, \gamma, \delta, \epsilon \in \mathbb{R}$ とする．このとき, 任意の $a > 0$ に対して式 (13) を満たすパラメータ $(\beta, \gamma, \delta, \epsilon)$ を求めよ.

(4) $D_c(s) = 1$, $N_c(s) = k_p$ とする (比例制御器)．このとき, 式 (13) を満たす組 (a, k_p) を求めよ.

N_p や N_c は仮想的なシステムなので, a の選び方は安定化問題に対して本質的ではない．考えている制御対象 (11) は比例制御器でも安定化できるが, これを Bezout 等式から求めるには, 仮想的なシステムの選び方も工夫しなければ

ばならない．Bezout 恒等式を解くアルゴリズムとして, Euclid の互除法や MacDaffee の方法が知られている [4,5]. しかし, ここでは極配置法を用いた単純な方法を考えよう．

(1) n 次の伝達関数 $P(s)$ に対して, -1 を閉ループ系の $2n$ 重根としてもつよう, 極配置法によって n 次の制御器 $C(s)$ を求める．
(2) $P(s)$ と $C(s)$ の分母多項式および分子多項式を, それぞれ $(s+1)^n$ で割る．

このようにすれば, Bezout 恒等式を満たすように $N_p(s)$, $D_p(s)$, $N_c(s)$, $N_d(s)$ を求めることができる．

最後に, 既約分解を $\mathcal{S}$ 上, すなわち安定な伝達関数で行う理由についても述べておく．安定性は, 分母多項式の根を調べることと同値であるが, 多項式を用いて Bezout 等式を導くことは可能である．しかし, そのようにして得られた制御器がプロパーであるとは限らず, 物理的に意味のない解も得られることがある．$\mathcal{S}$ 上の既約分解では, このようなことが生じない．

では, 不安定な有理関数も許すことにし, プロパーな実有理関数のみで考えるとどうであろうか？ これは, $D_c(s)D_p(s)$ で不安定な極零相殺を起こしうるため, フィードバック系が内部安定にならない．結局, 安定性を保証するためには, $\mathcal{S}$ 上の既約分解が必要になる

問題 7. 既約分解を多項式で表わした場合, プロパとは限らない伝達関数が得られることがあるが, そのような例を示せ．

2.2 安定化制御器の全体

Bezout 恒等式を解くと, 安定化制御器が一つ求められることを見た．今度は, 与えられた制御対象を安定化する制御器の集合がどのように特徴づけられるかを求めよう．

Bezout 恒等式を満たす制御器 $C(s)$ の既約分解 $(N_c(s), D_c(s))$ が得られているものとする．このとき, $N_c(s)+Y(s)$, $D_c+X(s)$ として, 新たな制御器

$$\tilde{C}(s)=\frac{N_c(s)+Y(s)}{D_c(s)+X(s)}$$

を考えよう．この新たな制御器を用いたとき, 閉ループ系の安定性は

$$\begin{aligned}1=&(D_c(s)+X(s))D_p(s)\\&+(N_c(s)+Y(s))N_p(s)\end{aligned}$$

を満たす $(X(s), Y(s))$ を探すことと同値になる．$C(s)$ の既約分解は Bezout 恒等式 (13) を満たすので,

$$X(s)D_p(s)+Y(s)N_p(s)=0$$

となることが必要十分条件である． これは, $Q\in\mathcal{S}$ を用いて,

$$X(s)=Q(s)N_p(s),\quad Y(s)=-Q(s)D_p(s)$$

と表わすことができる．

したがって, 制御対象 $P(s)$ が与えられたとき, その既約分解 $(N_p(s), D_p(s))$ に対して閉ループ系を安定化する制御器は, 次の集合に属する．

$$\left\{\frac{N_c(s)+D_p(s)Q(s)}{D_c(s)-N_p(s)Q(s)}\ :\ Q\in\mathcal{S}\right\}.$$

ここで, $(N_c(s), D_c(s))$ は, Bezout 恒等式 (13) を満たす $\mathcal{S}$ の元である．安定化制御器は, 自由パラメータ $Q\in\mathcal{S}$ によって表わされる（図 2）．

問題 8.

安定化制御器の集合を特徴づけよう．

(1) $P=\frac{1}{s-1}$ とする．このとき, $P(s)$ を安定化する制御器の集合を求めよ．
(2) $P=\frac{1}{s^2}$ とする．このとき, $P(s)$ を安定化する制御器の集合を求めよ．

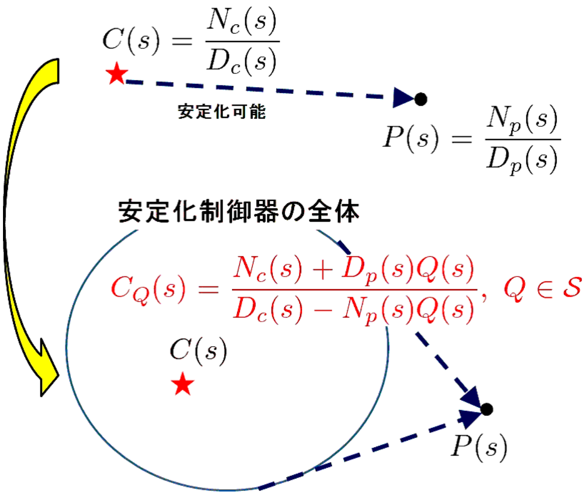

図 2　安定化制御器の全体.

安定化制御器を求める問題は, 本稿程度で用いる代数学の知識で十分ということになる. 用いている理論は単純だが, このように豊かな結果を導ける.

Bezout 等式を用いて求めた制御器は, 制御対象と同じ次数になるしかし, 例えば制御対象が安定の場合, 比例制御のみで安定化可能であったように, 制御器が複雑な形になる. 安定化するために必要な制御器の次数に関する結果も知られている [6].

2.3　制御器が安定化できる制御対象の全体

$P(s)$ と $C(s)$ の役割を変えると, 次のような問題も考えられる.

「ある制御対象 $P(s)$ を安定化する制御器 $C(s)$ が一つ得られたとする. このとき, その $C(s)$ が安定化できるプラントの集合を求めよ.」

この問題は, 設計した制御器が安定化できる制御対象のクラスを求めることを意味し, 制御器のロバスト性を意味する.

ある制御対象 $P(s) = N_p(s)/D_p(s)$ に対し, Bezout 等式を用いて作成した安定化制御器 $C(s) = N_c(s)/D_c(s)$ が求められたとする. この制御器が安定化できる実有理関数でモデル化される制御対象は, 次で表現される集合の元である.

$$\left\{ \frac{N_p(s)+D_c(s)Q(s)}{D_p(s)-N_c(s)Q(s)} \ : \ Q \in \mathcal{S} \right\}.$$

3　追従制御と内部モデル原理

これまでの話は, 閉ループ系の安定性についての話が主であった. 閉ループ系の安定性は, 多くの制御問題では "必要条件" であり, 安定だからといって望ましい制御性能が達成できるわけではない. 制御対象の出力が望み通りの信号にしたいという問題は, 安定性に加えて "望み通りの信号 $r(t)$" に追従させるという制御目標を達成しなければならない. これは, $r(t)$ と出力 $y(t)$ の差 $e(t)$ を零にする問題であり, 漸近的に達成するための条件は, **内部モデル原理 (inner model principle)**(*13 という名前で知られている [7]. ここでは $r(t)$ のラプラス変換が有理関数になる場合のみを考えよう. とくに興味のある場合は, $r(t)$ が零に収束しない場合である. このとき,

$$R(s) = \frac{\beta_r(s)}{\alpha_r(s)}$$

の分母多項式 $\alpha_r(s)$ は, 虚軸を含む複素閉右半平面に少なくとも 1 つは根をもつ. $e(t)$ の Laplace 変換を $E(s)$ とすると,

$$\begin{aligned} E(s) =& R(s) - Y(s) \\ =& \frac{1}{1+P(s)C(s)} R(s) \end{aligned}$$

である. ここで

$$P(s) = \frac{\beta_p(s)}{\alpha_p(s)}, \quad C(s) = \frac{\beta_c(s)}{\alpha_c(s)}$$

(*13　プロセス制御では, 内部モデル制御と呼ばれる方法もあるが, これとは異なる.

とすると, 誤差信号は

$$E(s) = \frac{\alpha_p(s)\alpha_c(s)}{\alpha_p(s)\alpha_c(s) + \beta_p(s)\beta_c(s)} \frac{\beta_r(s)}{\alpha_r(s)} \quad (14)$$

で表わされる．もとの閉ループ制御系が不安定であれば, $|y(t)| \to \infty$ となり, 安定限界ならば $y(t)$ は入力次第で発散しうるため, 閉ループ制御系は安定である必要があることに注意されたい．これは, $\alpha_p(s)\alpha_c(s) + \beta_p(s)\beta_c(s)$ の根が安定になることを意味する．Laplace の最終値定理

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s)$$

を用いることを考えると，これは $E(s)$ の極に $s = 0$ を持ち，他の極が全て安定になることが必要十分であった．$E(s)$ の極で不安定になっているものは, $R(s)$ の極のみであるので, これを分子多項式で相殺しなければ, $e(t)$ の漸近安定性は保証されない．したがって, $\alpha_p(s)\alpha_c(s)$ の根が, $\alpha_r(s)$ の根を全て含んでいなければならない (これが内部モデル原理と呼ばれる所以である)．このとき,

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = 0$$

となり, $y(t)$ が $r(s)$ に漸近的に追従する．

問題 9． 制御対象の伝達関数を

$$P(s) = \frac{1}{s-1}$$

とする．このとき, 以下の問に答えよ．

(1) 追従制御で最も基本的なものは, ステップ応答である． $R(s) = \frac{1}{s}$ としたとき, $e(t) = r(t) - y(t) \to 0$ となる制御器を作成せよ．

(2) 正弦波への追従問題を考える． $R(s) = \frac{3}{s^2+9}$ としたとき, $e(t) = r(t) - y(t) \to 0$ となる制御器を作成せよ．

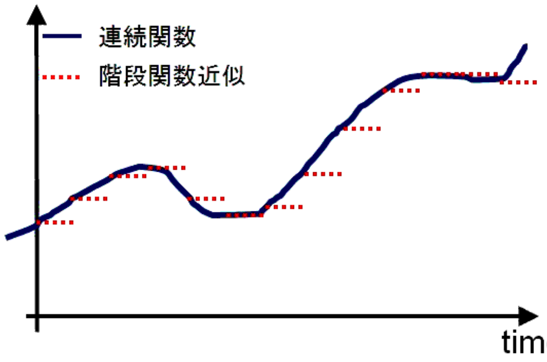

図 3　連続関数の階段関数近似．

速いステップ応答が実現できれば, 追従誤差は零ではないものの, 大抵の連続関数に “だいたい”追従できる．連続関数が階段関数の極限で近似できることを思い出せば, 速いステップ応答が重要であることが分かると思う（図 3）．内部モデル原理で保証されることは, $t \to \infty$ で誤差が零になることであるため, 速いステップ応答を実現するためには別の工夫が必要である．そこで, 追従誤差 $e(t)$ の二乗積分を最小化することを考えよう．内部モデル原理を用いた安定化制御が行えているとすると, Parseval の公式(*14 より,

$$\int_0^\infty e(t)^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |E(j\omega)|^2 d\omega \quad (15)$$

が成り立つ [5]．右辺は, 周波数領域での誤差信号の絶対二乗積分である．解析的な複素関数の虚軸上の二乗積分の平方根をとったものは, H^2 ノルムと呼ばれる．ここでは誤差信号に対して扱っているが，同じく複素関数として表せる伝達関数に対しても，H^2 ノルムで評価することは可能である．外乱から誤差信号までの閉ループ伝達関数の H^2 ノルムは制御性能の代表的な

(*14 より一般的には Plancherel の定理という．

指標の 1 つである [3]．ここで制御対象を

$$P(s) = \frac{1}{s-1}$$

としよう．PI 制御を行うと，比例ゲイン $K_p > 1$，積分ゲイン $K_i > 0$ のとき，閉ループ系は安定で，ステップ応答の追従誤差を零にできる．

$$\begin{aligned} E(s) =& \frac{s(s-1)}{s^2+(K_p-1)s+K_i}\frac{1}{s} \\ =& \frac{s-1}{s^2+(K_p-1)s+K_i} \end{aligned}$$

したがって，制御器を PI 制御器に限定したとき，閉ループ系を安定化する範囲で K_i と K_p を適当に動かし，最適なパラメータの組を探せばよい．K_i を $10^{0.1}$ から 10^5 まで，K_p を $10^{0.1}$ から 10^5 までそれぞれ動かした際の $E(s)$ の H^2 ノルムの逆数を，図 4 に示す(*15．ここで逆数をとった理由は，3 次元の図では最大値の方が分かりやすいからである．この例では，K_i も K_p も大きい方が望ましい応答になる．極を計算すると，

$$\frac{1}{2}\left\{-(K_p-1) \pm \sqrt{(K_p-1)^2-4K_i}\right\}$$

となるので，K_p が大きいほど速く減衰し，K_i が大きいほど時間応答が振動的になる．時間応答の振動性は，二乗積分の際に有利になるため，これらのパラメータは大きいほどよい．しかし，あまり大きくしすぎると，モデル化誤差に対するロバスト性は失われるので，実際の設計では複数の性能を同時に考える必要がある．

ロバスト性のためによく知られている指標は，外乱から出力への伝達関数の H^∞ ノルムである．伝達関数 $G(s)$ とすると，

$$\|G\|_{H^\infty} := \sup_{s\in\{s\in\mathbb{C}\ |\ \mathrm{Re}(s)>0\}} |G(s)|$$

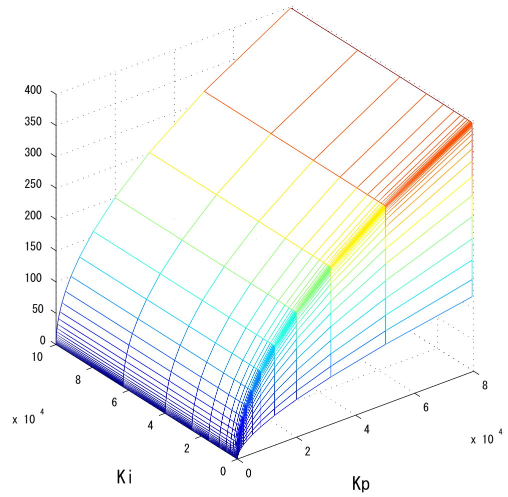

図 4　比例ゲイン K_p と積分ゲイン K_i をそれぞれ動かして閉ループ伝達関数を作成し，$E(s)$ のステップ応答の H^2 ノルムの逆数をプロットしたもの．

で定義される．1 入出力系の場合，安定な伝達関数の H^∞ ノルムはゲインの最大値と一致する．この指標は，入力を $u(t)$，出力を $y(t)$ とすると，

$$\|G\|_{H^\infty} = \sup_{u\in L^2}\sqrt{\frac{\int_0^\infty |y(t)|^2 dt}{\int_0^\infty |u(t)|^2 dt}}$$

とも表せる．ここで L^2 は，

$$L^2 := \{u : \mathbb{R}\to\mathbb{R}\ |\ \int_0^\infty |u(t)|^2 dt < \infty\}$$

で定義される関数の集合である．H^∞ ノルムを小さくすると，モデル化誤差に対してロバストな制御ができていると解釈される．先ほどと同じ条件で PI 制御のパラメータを変化させ H^∞ ノルムを計算し，その常用対数をとったものの逆数をプロットしたものを図 5 に表わす(*16．図 5 からは，K_p を大きくした方がよく，

(*15　作成したアルゴリズムは，本稿の最後に載せる．

(*16　対数をとったり逆数をとったりしている理由は見やすくするためであって，本質的ではない．

K_i は小さい方がよいことがわかる．

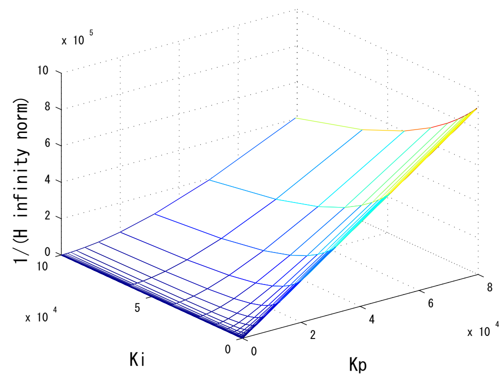

図 5　比例ゲイン K_p と積分ゲイン K_i をそれぞれ動かして閉ループ伝達関数を作成し，その H^∞ ノルムの対数の逆数をプロットしたもの．

工学では，このように複数の指標を同時に最適化したい場合が多い．複数の性能を同時に最適化することは，**多目的最適化 (multi objective optimization)** と呼ばれる．多目的最適化問題をそのまま解くのは難しいため，複数の最適化指標の凸結合したものを新たな評価指標として用いることも多い(*17．最適制御については，別の項で改めて取り上げる．

4　2 自由度制御

フィードバック制御が安定化に対して重要であるのに対し，フィードフォワード制御は制御性能を高めるために重要である．フィードフォワード制御の本質は，予測制御である．数理モデルに不確かさがなく，パラメータの不確実さや外乱もない場合，与えられた情報から未来の挙動を完全に推測できるため，“完璧な制御”が可能になる．すなわち，“完全な情報”の下では，フィードフォワード制御のみで性能が保証される．しかし，ほんのわずかな数値誤差でも許されないため，これは理想論に過ぎないのだが，フィードバック制御も併用することで上に挙げた種々の不確かさを抑制でき，“完璧な制御”とはいかないまでも，高性能な制御系の設計が期待できる．

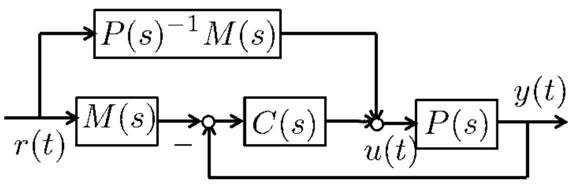

図 6　2 自由度制御系．

図 6 のシステムを考えよう．

$$Y(s) = P(s)\big\{P(s)^{-1}M(s)R(s) + C(s)\big(M(s)R(s) - Y(s)\big)\big\}$$

より，簡単な計算から，

$$\begin{aligned}&(1 + P(s)C(s))Y(s)\\ &= (1 + P(s)C(s))M(s)R(s) \qquad (16)\\ \Rightarrow\ &Y(s) = M(s)R(s) \qquad (17)\end{aligned}$$

が得られる(*18．この $M(s)$ を，望ましい伝達特性をもつ伝達関数に設計すればよい．参照入力 $r(t)$ の応答 $M(s)R(s)$ は，一見するとプラントに依存しない任意の伝達関数 $M(s)$ によって表現されているが，実際には，$M(s)$ は次の条件を満たす必要がある．

- $P(s)^{-1}M(s)$ がプロパー．
- $M(s)$, $P(s)^{-1}M(s)$ が安定．

(*17 凸結合する際は，最適化指標の単位について考えなければならない．大学生になると単位について気にしなくなるのか，異なる単位をもつものを足し合わせる例を見かけるが，同じ単位を持つ指標同士でなければ，凸結合はとれない．

(*18 数学的には式 (16) の両辺を約分してよいが，工学的には，本稿で述べたように，不安定な極零相殺を行ってはならない．このため，$(1 + P(s)C(s))$ が安定となるよう，制御器 $C(s)$ を設計する必要がある．

この場合, $P(s)^{-1}$ と $M(s)$ との間に不安定な極零相殺があってもよいことに注意しよう．すなわち, $P(s)$ の不安定零点を $M(s)$ で消してもよい．図 7 を見ると, $P(s)^{-1}$ と $M(s)$ の極零相殺は, 制御器の中で行うため, 解析的にかつ初期値の応答を気にせずに行えるためである．$P(s)^{-1}$ と $M(s)$ というシステムを作ってからかけ合わせているのではなく, $P(s)^{-1}M(s)$ という伝達関数を作っているのである．例えば, 次の制御対象と制御器を考えよう．

$$
\begin{aligned}
P(s) =& \frac{s-2}{s^2+3s+1} \qquad (18)\\
C(s) =& \frac{-1}{s+1}
\end{aligned}
$$

この閉ループ系は安定となるが, 制御対象が不安定零点を含む．そこで, $P(s)^{-1}M(s)$ が安定となるように,

$$M(s) = K\frac{s-2}{m(s)}$$

とおく．つまり, $P(s)$ の不安定な零点が, $M(s)$ の零点にあればよい．$K \in \mathbb{R}$ で $m(s)$ は安定な 1 次以上の多項式である．$m(s)$ は安定ならば何でもよいため, 例えば $m(s) = (s+a)^n$, $n \geq 2$, $a > 0$ とすればよい．ここで K や a は設計の自由度であり, 欲しい制御性能に応じて決定する必要がある．したがって,

$$M(s) = K\frac{s-2}{(s+a)^n}, \quad n \geq 2, \ a > 0 \qquad (19)$$

$$P(s)^{-1}M(s) = K\frac{s^2+3s+1}{(s+a)^n} \qquad (20)$$

となる．

さて, ここで前節と同じく初期値応答について考えよう．式 (17) の導出をみると, フィードバック制御器 $C(s)$ は何であっても良さそうであるように見えるが, 初期値応答を考えると $C(s)$ は $P(s)$ と不安定な極零相殺がなく, かつ閉ループ系を安定化するように設計しなければならないことが分かる．さらに, 初期値の応答が速く消えるためには, $C(s)$ の設計において初期応答が素早く減衰するように設計しなければならない．現実的な応答を考えるには, $M(s)$ のみの設計だけでなく, $C(s)$ の設計も重要である．

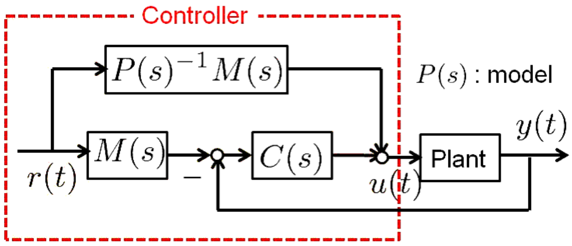

図 7　2 自由度制御系の制御器と制御対象.

問題 10. 追従制御の問題を考えよう．追従誤差 $E(s) = R(s) - Y(s) = (1-M(s))R(s)$ が $t \to \infty$ の極限で 0 になるための条件は, 前節で述べた通りである．

(1) 出力 $y(t)$ がステップ入力 $R(s) = \frac{1}{s}$ に追従するための $M(s)$ の条件は, $M(0) = 1$ であることを示せ．

(2) 出力 $y(t)$ が正弦波入力 $R(s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ に追従するための $M(s)$ の条件は, $M(j\omega) = 1$ であることを示せ．

追従制御の場合, 定常状態で追従を達成するには, $R(s)$ の不安定極を $(1-M(s))$ の不安定零点で相殺しなければならない．$R(s)$ の不安定極 $s^* \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(s^*) \geq 0$ で $R(s^*) = \infty$ となるため, 不安定極 s^* の極零相殺とは $1 - M(s^*) = 0$ を意味している．したがって, 問題で述べた条件が必要となる．不安定極が虚軸上にある場合, この条件は $M(s)$ の Bode ゲイン線図がその極で $\log|M(j\omega)| = 0$ となることを意味する．

参考文献

[1] 片山徹. フィードバック制御の基礎. 朝倉書店, 2005.

[2] Mathukumalli Vidyasagar. *Control System Synthesis: A Factorization Approach*. MIT press Cambridge, MA, 1985.

[3] Kemin Zhou, John C. Doyle, and K. Glover. *Robust and Optimal Control*. Prentice Hall Upper Saddle River, NJ, 1996.
劉 康志, 羅 正華 共訳：ロバスト最適制御, コロナ社, 1997.

[4] 前田肇, 杉江俊治. アドバンスト制御のためのシステム制御理論. システム制御情報ライブラリー 3. 朝倉書店, 1990.

[5] John C. Doyle, Bruce A. Francis, and Allen R. Tannenbaum. *Feedback Control Theory*. Prentice Hall, Inc., 1992.
藤井隆雄 監訳, フィードバック制御の理論 – ロバスト制御の基礎理論–, コロナ社 (1996).

[6] V. L. Syrmos, C. T. Abdallah, P. Dorato, and K. Grigoriadis. Static output feedback–A survey. *Automatica*, Vol. 33, No. 2, pp. 125–137, 1997.

[7] B. A. Francis and W. M. Wonham. The internal model principle for linear multivariable regulators. *Applied Mathematics and Optimization*, Vol. 2, No. 2, pp. 170–194, 1975.

付録 A　図 4 と図 5 の作成アルゴリズム

```
num_P = [1];% 分子多項式
den_P = [1,-1];% 分母多項式
P = tf(num_P,den_P);% 1/(s-1)

Kp = 10.^(0.1:0.2:5);% 対数スケールで等間隔になるように
Ki = 10.^(-1:0.2:5);

% 各ゲインの組み合わせでのノルムの値
H2norm_G_cl = zeros(length(Kp),length(Ki));
H2norm_E = zeros(length(Kp),length(Ki));
Hinfnorm_G_cl = zeros(length(Kp),length(Ki));

for kp=1:length(Kp)
    for ki=1:length(Ki)

        C_pi=tf([Kp(kp),Ki(ki)],[1,0]);
        G_cl=feedback(series(P,C_pi),1);% インパルス応答
        E=tf([1,-1],[1,Kp(kp)-1,Ki(ki)]);% ステップ応答

        % H2 ノルムの計算
        H2norm_G_cl(kp,ki)=norm(G_cl,2);
        H2norm_E(kp,ki)=norm(E,2);

        % H_inf ノルムの計算
        Hinfnorm_G_cl(kp,ki)=norm(G_cl,inf);

        % 最適となるゲインの組み合わせの更新
        if kp==1 && ki==1
            ind_min_2=[kp,ki];
            ind_min_inf=[kp,ki];
        else
            if H2norm_E(kp,ki) < H2norm_E(ind_min_2(1),ind_min_2(2))
                ind_min_2=[kp,ki];% ステップ応答の H2 ノルムが最小になる
            end
```

```
            if Hinfnorm_G_cl(kp,ki) < Hinfnorm_G_cl(ind_min_inf(1),ind_min_inf(2))
                ind_min_inf=[kp,ki];% ステップ応答の H2 ノルムが最小になる
            end

        end
    end
end

figure
mesh(Kp,Ki,1./H2norm_E')
xlabel('Kp','fontsize',14)
ylabel('Ki','fontsize',14)
zlabel('$$1/\| E \| _{H^2}^{2} $$','interpreter', 'latex','fontsize',14)

figure
mesh(Kp,Ki,1./log10(Hinfnorm_G_cl)')
xlabel('Kp','fontsize',14)
ylabel('Ki','fontsize',14)
zlabel('$$1/\log H_{\infty} $$','interpreter', 'latex','fontsize',14)
```