

2 動的システムモデルの導出

2.1 動的システムモデルの例

水タンクの水位

表 2.1 : 水タンクの記号

タンク断面積	$A \text{ (m}^2\text{)}$
流出口面積	$S \text{ (m}^2\text{)}$
水位	$h \text{ (m)}$
流入量	$q_i \text{ (m}^3\text{/s)}$
流出量	$q_o \text{ (m}^3\text{/s)}$

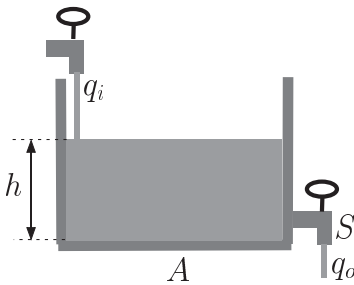


図 2.1 : 水タンク

図 2.1 で与えられる水タンクの水位モデルを構築する。まずは物理法則を列挙する。

- 流出口での流速 $v \text{ (m/s)}$ はトリチェリの定理に従う。ただし g は重力加速度である。

$$v = \sqrt{2gh}. \quad (2.1)$$

- 流出量は、流速と流出口面積の積に等しい。

$$q_o = vS. \quad (2.2)$$

- タンク内の水量の変化量（水位の変化量とタンク断面積の積）は、流入量と流出量の差に等しい。

$$A \frac{d}{dt} h = q_i - q_o. \quad (2.3)$$

以上の式 (2.1)–(2.3) より v と q_o を消去すると、流入量を入力として水位の変化を表す微分方程式を得ることができる。

$$\frac{d}{dt} h = -\frac{S}{A} \sqrt{2gh} + \frac{q_i}{A} \quad (2.4)$$

式 (2.4) は、水位変化を表す非線形微分方程式になっている（右辺の平方根に注意）。流入量を固定すると、式 (2.4) の右辺を 0 とおくことにより平衡水位 h_e が求まる。このまわりで線形化することによりモデルとしてより簡単ではあるが扱いやすい線形微分方程式を得ることができる。

- 平衡水位を求める。

$$S\sqrt{2gh_e} = q_i \text{ より } h_e = \frac{q_i^2}{2gS^2}. \quad (2.5)$$

- 非線形関数 $\sqrt{2gh}$ を $h = h_e + x$ (x は平衡水位からの変化) として線形近似する（なめらかな非線形関数 f に関して $f(x) = f(0) + f'(0)x + O(x^2)$ である。この場合 $f(x) = \sqrt{2g(h_e + x)}$ とおいたことになり、 $f(0) = \sqrt{2gh_e}$ 、 $f'(0) = \sqrt{g/(2h_e)}$ であることに注意する）。

$$\sqrt{2gh} = \sqrt{2gh_e} + \sqrt{\frac{g}{2h_e}}x + O(x^2). \quad (2.6)$$

- 非線形微分方程式 (2.4) において式 (2.6) を用いて平衡水位からの変化の二次以上の項を無視した微分方程式を求める。

$$\frac{d}{dt} x = -\frac{S}{A} \sqrt{\frac{g}{2h_e}}x = -\frac{S^2 g}{Aq_i} x \quad (2.7)$$

タンクの水位に関するモデルとして非線形微分方程式 (2.4) と線形微分方程式 (2.7) を得たが、それらについて以下の点を注意しておく。

- 非線形微分方程式 (2.4) も、水タンクの水位を忠実に記述しているわけではなく、仮定がはいっている。つまりトリチェリの定理は、周囲の大気圧が一定で、液面の降下速度を無視できると仮定した場合におけるベルヌーイの定理の特別な場合に相当している。
- 線形微分方程式 (2.7) は、水位変化が微小であるという仮定のもとに近似的に成り立つわけであるが、この講義でも示して行くように解析や設計にすぐれた効果を発揮する。
- 線形微分方程式 (2.7) を用いて、たとえば鉄鋼プロセスにおける連続鋳造でのモールド湯面制御などの応用が成功している。

自動車の平面運動

自動車の平面運動に関するモデル化を考える。詳しくはたとえば文献 [A] を参照されたい。

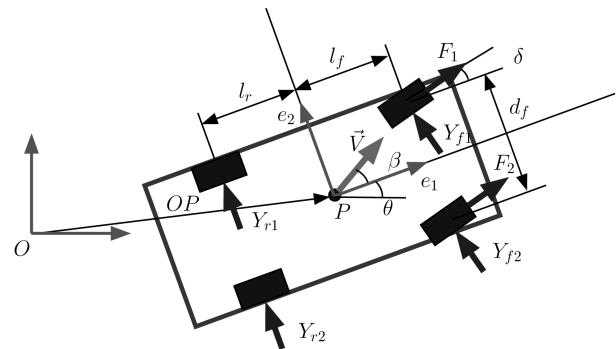


図 2.2 : 車両の平面運動

車体が平面内を動くときのモデルを

- 車体は剛体。

- 運動は平面内に限られる。

という仮定のもとにつくる．図 2.2 に車両の平面運動をここに各記号は以下の意味をもつ．

表 2.2 : 車両の平面運動モデル記号

記号	記号の意味
M	車体質量
I	車体重心回りの慣性モーメント
K_f	前輪コーナリングパワー
K_r	後輪コーナリングパワー
l_f	重心から前輪軸までの距離
l_r	重心から後輪軸までの距離
d_f	前輪トレッド
F_1	左前輪駆動力
F_2	右前輪駆動力
δ	舵角
Y_{f1}	左前輪コーナリングフォース
Y_{f2}	右前輪コーナリングフォース
Y_{r1}	左後輪コーナリングフォース
Y_{r2}	右後輪コーナリングフォース
θ	固定座標軸からの車体回転角
ω	同回転角速度
β	車体横すべり角
v	車体速度 (スカラー量)
\vec{V}	車体速度ベクトル
O	固定原点
P	車両重心
\vec{r}	位置ベクトル OP

まずベクトル OP を \vec{r} で表す．その時間変化である速度ベクトル \vec{V} を車両に固定した座標系の単位ベクトル e_1 と e_2 を用いて表現する．

$$\frac{d}{dt}\vec{r} = \vec{V} = v_1 e_1 + v_2 e_2,$$

$$v = |\vec{V}|, \quad v_1 = v \cos \beta, \quad v_2 = v \sin \beta.$$

次に $(d/dt)e_1 = (d\theta/dt)e_2$, $(d/dt)e_2 = -(d\theta/dt)e_1$ を用いてもう 1 回微分する．

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}\vec{r} &= \frac{dv_1}{dt}e_1 + v_1 \frac{de_1}{dt} + \frac{dv_2}{dt}e_2 + v_2 \frac{de_2}{dt} \\ &= \left(\frac{dv_1}{dt} - v_2 \frac{d\theta}{dt} \right) e_1 + \left(\frac{dv_2}{dt} + v_1 \frac{d\theta}{dt} \right) e_2 \\ &= \left(\frac{dv}{dt} \cos \beta - v \frac{d\beta}{dt} \sin \beta - v \frac{d\theta}{dt} \sin \beta \right) e_1 \\ &\quad + \left(\frac{dv}{dt} \sin \beta + v \frac{d\beta}{dt} \cos \beta + v \frac{d\theta}{dt} \cos \beta \right) e_2. \end{aligned}$$

車両に加わる力の総和 (ベクトル量) を舵角 δ が微小であると仮定すれば

$$\vec{F} = (F_1 + F_2) e_1 + (Y_{f1} + Y_{f2} + Y_{r1} + Y_{r2}) e_2$$

を得る．さらに車両重心回りのモーメントは

$$N = \frac{(F_2 - F_1) d_f}{2} + (Y_{f1} + Y_{f2}) l_f - (Y_{r1} + Y_{r2}) l_r$$

で与えられる．タイヤの横すべり角 (slip angle) と横力 (side force) は，横すべり角が微小であれば比例す

る．比例定数をコーナリングパワーまたはコーナリング剛性という．これらを前輪 (K_f)，後輪 (K_r) とおく．

ここで運動方程式は

$$M \frac{d^2}{dt^2} \vec{r} = \vec{F}, \quad I \frac{d^2}{dt^2} \theta = N$$

となるので，コーナリングフォースが

$$Y_{f1} = Y_{f2} = -K_f \left(\beta + \frac{l_f}{v} \omega - \delta \right),$$

$$Y_{r1} = Y_{r2} = -K_r \left(\beta - \frac{l_r}{v} \omega \right)$$

で与えられることを考慮すると，自動車の平面運動は微分方程式

$$\begin{bmatrix} M \cos \beta & -Mv \sin \beta & 0 \\ M \sin \beta & Mv \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} v \\ \beta \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Mv\omega \sin \beta + F_1 + F_2 \\ -2(K_f + K_r)\beta - 2\frac{(K_f l_f - K_r l_r)}{v} \omega \\ -2(K_f l_f - K_r l_r)\beta - 2\frac{K_f l_f^2 + K_r l_r^2}{v} \omega \\ -Mv\omega \cos \beta + 2K_f \delta \\ +2K_f l_f \delta + \frac{(F_2 - F_1) d_f}{2} \end{bmatrix}$$

で記述できる．ここで左辺の係数行列の逆行列を両辺に乘じることにより非線形状態方程式

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} v \\ \beta \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\cos \beta}{M} (F_1 + F_2) - \frac{2}{M} (K_f + K_r) \beta \sin \beta \\ -\omega - \frac{\sin \beta}{Mv} (F_1 + F_2) - \frac{2}{Mv} (K_f + K_r) \beta \cos \beta \\ -\frac{2}{I} (K_f l_f - K_r l_r) \beta - 2\frac{K_f l_f^2 + K_r l_r^2}{Iv} \omega \\ -\frac{2(K_f l_f - K_r l_r)}{Mv} \sin \beta \omega + \frac{2K_f}{M} \delta \sin \beta \\ -\frac{2(K_f l_f - K_r l_r)}{Mv^2} \cos \beta \omega + \frac{2K_f}{Mv} \delta \cos \beta \\ + \frac{2}{I} K_f l_f \delta + \frac{(F_2 - F_1) d_f}{2I} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

を得る．

線形状態方程式は式 (2.8) を $v = v_0$, $\omega = 0$, $\beta = 0$ のまわりで線形化 ($\sin \beta \approx \beta$ などとおく) することによって得ることができる．

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} v \\ \beta \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{Mv_0} (K_f + K_r) & -1 - \frac{2(K_f l_f - K_r l_r)}{Mv_0^2} \\ 0 & -\frac{2}{I} (K_f l_f - K_r l_r) & -2\frac{K_f l_f^2 + K_r l_r^2}{Iv_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \beta \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{M} & \frac{1}{M} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2K_f}{Mv_0} \\ -\frac{d_f}{2I} & \frac{d_f}{2I} & \frac{2}{I} K_f l_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \delta \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

ここで速度一定モデル ($v = v_0$) は

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \beta \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{Mv_0} (K_f + K_r) & -1 - \frac{2(K_f l_f - K_r l_r)}{Mv_0^2} \\ -\frac{2}{I} (K_f l_f - K_r l_r) & -2 \frac{K_f l_f^2 + K_r l_r^2}{Iv_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{2K_f}{Mv_0} \\ -\frac{d_f}{2I} & \frac{d_f}{2I} & \frac{2}{I} K_f l_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \delta \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

となる。

以上より、車両の平面運動を表す非線形状態方程式 (2.8) と二種類の線形状態方程式 (2.9), (2.10) を得ることができた。しかしこれらは車両の運動を忠実に表しているのではないことに注意する。車体が剛体と見なせるかは、モデルが車体に運動をどこまで表現する必要にかかっている。また車体が平面内を動くという仮定も同様である。また完全に物理法則のみでモデル化しているわけではなく、たとえばタイヤの特性は経験則 (実験値) に基づいて大きな近似を行っていることにも注意したい。どのモデルが適当であるかについては、使用目的で変わってくることになる。

磁気浮上系

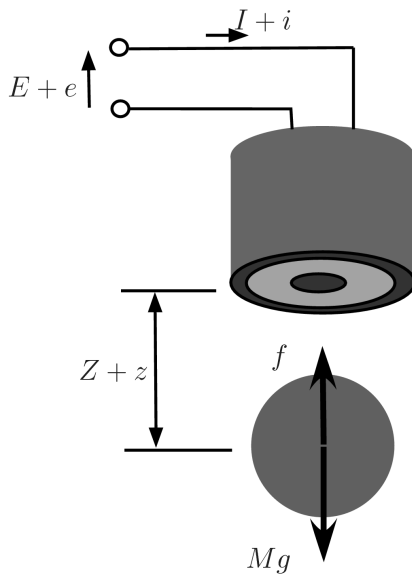


図 2.3：鉄球の磁気浮上系

表 2.3：鉄球の磁気浮上装置記号

記号	記号の意味
M	鉄球質量
E	電磁石定常電圧
e	定常電圧からの変化
I	電磁石定常電流
i	定常電流からの変化
Z	電磁石と鉄球の定常ギャップ
z	定常ギャップからの変化
f	電磁石吸引力

磁気浮上系については、第 1 回講義でも磁気浮上鉄道の実例を紹介したように広く実用化が進められている。ここでは、磁気浮上系の制御系設計という観点か

ら鉄球浮上実験装置のモデル化を考えてみる。なおこの節は [FN] を参照した。

電磁石に関して

- 透過率は無限大である。
- ヒステリシス、漏れ磁束はない。
- うず電流は無視できる。

という仮定のもとで、以下の非線形方程式で図 2.3 の磁気浮上系は記述できる。

$$m \frac{d^2}{dt^2} z = mg - f, \quad (2.11)$$

$$f = k \left(\frac{I+i}{Z+z+z_0} \right)^2, \quad (2.12)$$

$$e = Ri + \frac{d}{dt} \{L(z)(I+i)\}. \quad (2.13)$$

ただし z_0, k は定数のパラメータである。また R は電磁石の抵抗, $L(z)$ は電磁石のインダクタンスであり、電磁石と鉄球のギャップに依存するものと考えられる。

ここで状態変数を

$$x = \begin{bmatrix} z \\ \frac{d}{dt} z \\ i \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

とにおいて、非線形方程式 (2.11)–(2.13) の動作点での線形近似から線形状態方程式

$$\frac{d}{dt} x = Ax + Be$$

を求めてみる。そのために

$$\frac{\partial}{\partial i} \left(\frac{I+i}{Z+z+z_0} \right)^2 = \frac{2(I+i)}{(Z+z+z_0)^2}, \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{I+i}{Z+z+z_0} \right)^2 = \frac{-2(I+i)^2}{(Z+z+z_0)^3} \quad (2.16)$$

であることに注意しておく。また定常状態の関係より

$$mg = k \left(\frac{I}{Z+z_0} \right)^2 \quad (2.17)$$

であることに注意する。

以下では、インダクタンス $L(z)$ が定数と考えられる場合と $L(z)$ がギャップの関数である場合の二つの場合についてそれぞれ定常位置での線形化モデルを作成する。

定数インダクタンスである場合 $L(z) = L$ とインダクタンスは定数であると考ええる。このとき式 (2.13) は線形式となり、それより

$$\frac{d}{dt} i = -\frac{R}{L} i + \frac{1}{L} e \quad (2.18)$$

となる。一方、式 (2.11), (2.12) より

$$\frac{d^2}{dt^2} z = g - \frac{k}{m} \left(\frac{I+i}{Z+z+z_0} \right)^2$$

であり，右辺を式 (2.15),(2.16), (2.17) を用いて二次以上の項を無視すれば

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{2kI^2}{m(Z+z_o)^3} z - \frac{2kI}{(Z+z_o)^2} i$$

を得る．以上より

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{2kI^2}{m(Z+z_o)^3} & 0 & -\frac{2kI}{m(Z+z_o)^2} \\ 0 & 0 & -\frac{R}{L} \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix}$$

を得る．

位置に依存するインダクタンスである場合 インダクタンスは

$$L(z) = \frac{2k}{Z+z+z_o} + L_o. \quad (2.19)$$

である場合を考える．このときには式 (2.13) は，

$$e = Ri - \frac{2k(I+i)}{(Z+z+z_o)^2} \left(\frac{d}{dt} z \right) + L(z) \left(\frac{d}{dt} i \right) \quad (2.20)$$

となることに注意する．以上より

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{2kI^2}{m(Z+z_o)^3} & 0 & \frac{2kI}{(Z+z_o)\{2k+L_o(Z+z_o)\}} \\ 0 & \frac{0}{2k+L_o(Z+z_o)} & -\frac{2kI}{m(Z+z_o)^2} - \frac{R(Z+z_o)}{2k+L_o(Z+z_o)} \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{Z+z_o}{2k+L_o(Z+z_o)} \end{bmatrix}$$

を得る．

磁気浮上系モデル化のまとめ 物理法則で記述している箇所にもいくつかの仮定がある．

- 複雑なモデル化を避けるための仮定．
- パラメータは実験により値を決める．
- インダクタンスを定数にするか非線形関数にするかという選択．

どのモデル化をするかは，制御対象の特性や制御仕様によって決めるべきであることに注意したい．

生態系のモデル

ロジスティック方程式 (logistic equation) [W] は，人口増加のモデルでありベルハルスト (Pierre Verhulst) の提案による． N を個体数， K を持続できる最大個体数， r を変化率として

$$\frac{dN}{dt} = \frac{rN(K-N)}{K} \quad (2.21)$$

という形の非線形微分方程式である．ここで $x(t) = N(t)/K$ と正規化すれば，式 (2.21) は

$$\frac{d}{dt} x = rx(1-x) \quad (2.22)$$

となる．

初期条件を $x(0)$ とするとき式 (2.22) の解は，シグモイド関数 (sigmoid function)

$$x(t) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x(0)} - 1 \right) e^{-rt}}. \quad (2.23)$$

で与えられる． $r = 1$, $x(0) = 0.01$ のときに式 (2.23) の関数の形状を図 2.4 に示す．

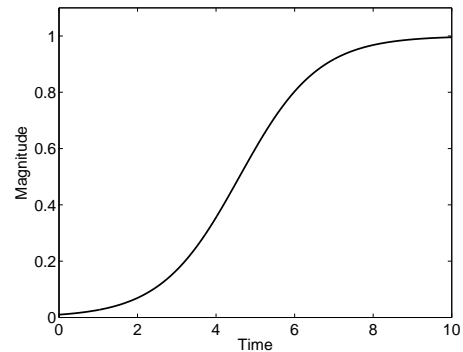


図 2.4 : シグモイド関数

ところで，式 (2.22) の左辺を前進オイラー法で近似することを考える．時間刻みを h として dx/dt を $(x(t+h) - x(t))/h$ で近似する．前進オイラー法の近似として $z(k) \approx x(kh)$ であるとすれば， $z(k)$ は差分方程式

$$z(k+1) - z(k) = hrz(k)(1-z(k)) \quad (2.24)$$

を満たすことになる．

ロジスティック写像 (logistic map) は，パラメータ $0 < \mu \leq 4$ を有する

$$x(k+1) = \mu x(k)(1-x(k)) \quad (2.25)$$

の形をした写像である．たとえば式 (2.24) において，

$$x(k) = \frac{hr}{1+hr} z(k)$$

と置きなおすと， $\mu = (1+hr)$ とおいて式 (2.25) になることに注意する．初期値 $x(0)$ を与えると離散時間の系列 $x(k)$ が定まるが， μ の値によってはその動きはさまざまに変わり乱雑なものとなっている．図 2.5 には， $\mu = 1.8, 3.78$, $x(0) = 0.15$ の場合のシミュレーションを示す．丸印は $\mu = 1.8$ ，×印は $\mu = 3.78$ のときである．このように単純そうに見える差分方程式から複雑な挙動が生み出されることが文献 [M] で論じられている．

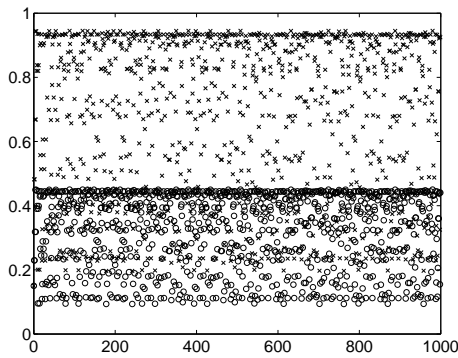


図 2.5: ロジスティック写像の応答

ロトカ・ヴォルテラ方程式 (Lotka-Volterra equation) は捕食者と被食者の個体数モデルであり x_1 を被食者個体数, x_2 を捕食者個体数として

$$\frac{d}{dt}x_1 = Ax_1 - Bx_1x_2 \quad (2.26)$$

$$\frac{d}{dt}x_2 = -Cx_2 + Dx_1x_2 \quad (2.27)$$

で表される. ここに A, B, C, D は定数のパラメータである.

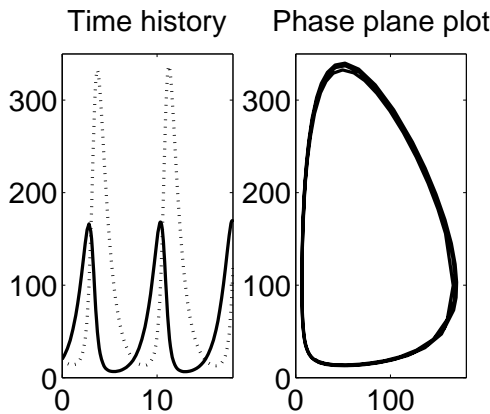


図 2.6: ロトカ・ヴォルテラ方程式のシミュレーション

平衡点は

$$x_e = \begin{bmatrix} x_{1e} \\ x_{2e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ D/A \\ A/B \end{bmatrix}$$

であることがわかるが, 平衡点から少しはなれた位置に初期点をとると挙動が大きく変わり非線形振動を引き起こしていることがわかる. つまり式 (2.26), (2.27) は, 非線形状態方程式として特徴的な動特性をもっている. 図 2.6 に $A = 1, B = 0.01, C = 1, D = 0.02$ として

$$x(0) = \begin{bmatrix} 20 \\ 20 \end{bmatrix}$$

としたときのシミュレーション結果を示す. 左側の図において実線が被食者の個体数, 破線が捕食者の個体数を示している. 非線形の振動現象を引き起こしていることがわかる. 右側ではそれを相空間 (解軌道を時間をパラメータとして (x_1, x_2) 平面に記したもの) に表している. 周期的な運動が見て取れる.

2.2 平衡点での線形近似モデルと系の安定性

水タンクの水位, 自動車の平面運動, 磁気浮上系のモデル作成においては, 非線形状態方程式を動作点で線形化して線形状態方程式を求めている. 線形制御のさまざまな結果を用いようとするれば, 線形モデルを導出する必要はあるが, そのようにして設計した制御系の振る舞いは, 非線形性があると考えられる実際の系の振る舞いとどのような関係にあるのであろうか. 特にそのことを安定性の観点から考えてみる.



図 2.7: 安定性と不安定性

平衡点の安定性とは, 微小な摂動が起こっても解軌道が平衡点に戻ろうとする性質を有するかということである. 模式的に図 2.7 にその考え方を示す. 左は微小な摂動によってでも平衡点から引き離される様子を表しており不安定な振る舞いを, 右は微小な摂動では平衡点に戻される様子を表しており安定な振る舞いの模式的な理解である.

リアプノフ (Aleksandr Mikhailovich Lyapunov) は, 機械システムや回転する液体の安定性を考察した. その結果, リアプノフ法 (間接法, 直接法) を考案して, 常微分方程式の解の安定性を議論した. 以下その一部を概説するが, 詳しくは文献 [1] などを参照されたい.

非線形状態方程式

$$\frac{d}{dt}x = f(x)$$

の平衡点 x_e (つまり $f(x_e) = 0$) を考える. $x(0)$ を x_e に “十分近くに” とればそれを初期値とする解 $x(t)$ は $t \geq 0$ において $x(0)$ の “近くに” とどまるならば平衡点 x_e は安定であるという (ここで引用符がついている理由は, 厳密にはこれらが $\varepsilon - \delta$ 論法を用いて定義されているためである). また x_e は安定であり, かつ $x(0)$ を x_e に “十分近くに” とればそれを初期値とする解 $x(t)$ は $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_e$ 満たすならば x_e は局所漸近安定であるという.

リアプノフの間接法は, 次のことを言っている. $x_e = 0$ と仮定した非線形状態方程式

$$\frac{d}{dt}x = f(x). \quad (2.28)$$

と, $x = 0$ で線形化された状態方程式

$$\frac{d}{dt}z = Az, \quad A = \frac{\partial f}{\partial x}(0). \quad (2.29)$$

を考える. このとき線形化された状態方程式 (2.29) の平衡点 $z = 0$ が漸近安定であれば, 非線形状態方程式 (2.28) の平衡点 $x_e = 0$ も漸近安定である.

参考文献

- [FN] 藤田政之, 滑川徹, 磁気浮上系のロバスト制御, 機械の研究, vol. 46, no. 3, pp. 93–101, 1994.
- [I] 井村順一, システム制御のための安定論, コロナ社, 2000.
- [M] Robert M. May, “Simple mathematical models with very complicated dynamics,” Nature, Vol.261, pp.459–467, 1976.
- [W] E.W. Weisstein, “Logistic Equation.” From MathWorld—A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/LogisticEquation.html>

練習問題

- 【1】式 (2.21) において, $x(t) = N(t)/K$ と正規化すれば, 式 (2.22) が成り立つことを確認せよ. また式 (2.23) の $x(t)$ は, 方程式 (2.22) を満たすことを確認せよ.
- 【2】2.2 節でのリアプノフの安定性 (間接法) について, 非線形状態方程式の平衡点の漸近安定性と, その平衡点で線形化された状態方程式の漸近安定性は等価ではないことに注意する. たとえば

$$\frac{d}{dt}x = -x^3$$

について, 何が言えるかを考察せよ.