

3 電気回路のモデリング

3.1 電気回路素子

電気回路素子は、それを流れる電流と両端の電位差との間に関係のある理想化された部品である。素子には、電流と電圧の関係が動的な要素を含まない静的な素子と、電流と電圧だけではなくその時間微分も含めた関係を有する動的な素子とがある。静的な素子には抵抗が、動的な素子にはキャパシタ、インダクタンスなどが考えられる。

3.1.1 抵抗

静的な素子は、図 3.1 に示すように、それを流れる電流 i と両端の電位差 v との間に関係がある。この関係は、電位差が電流の関数である、電流が電位差の関数である、そのいずれでもないといった種類に分類される。

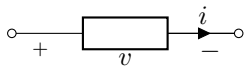


図 3.1：静的な素子

ここで電位差が素子を流れる電流と比例関係にある素子が抵抗である。つまり電位差と電流のグラフをかくと原点を通る直線になり（図 3.2 参照）、その傾き（比例係数）を抵抗値という。つまり

$$v = Ri \quad (3.1)$$

が成り立つ。これをオームの法則という。また抵抗値の逆数 $G = 1/R$ をコンダクタンスという。コンダクタンスを用いてオームの法則を記すと

$$i = Gv$$

となる。抵抗は図 3.3 のように表記する。

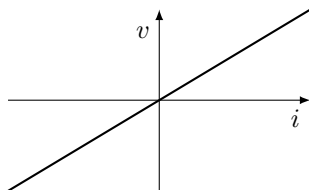


図 3.2：抵抗の電流と電位差の関係

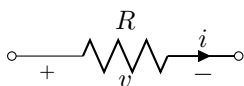


図 3.3：抵抗

3.1.2 キャパシタ

均質な誘電体が間にはいった無限に広がる平行平板に電荷が均等に分布する理想的な場合を考える（図 3.4 参照）。単位面積当たりの電荷量を q または $-q$ として平板間の電位差を求めてみる。詳しくは文献 [0] を参照されたい。

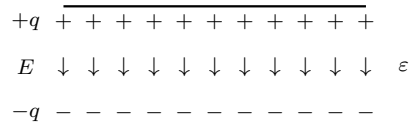


図 3.4：理想的な平行平板

まず単位面積当たりの電荷量が q である無限に広がる平板が 1 枚のときを考える（図 3.5 参照）。このとき、電界 \vec{E} は平板に垂直な方向成分しかないことに注意する。電束密度を $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ として、断面が単位面積をもち平板を垂直に貫く筒に対してガウスの法則を適用すると

$$\int \vec{D} \cdot \vec{n} dS = q$$

である。ただし \vec{n} は筒の外側に垂直に向かう単位長さのベクトルである。ここで、筒の側面上においては $\vec{D} \perp \vec{n}$ であるから、積分には寄与しない。筒の二つの底面においては、 \vec{D} と \vec{n} は同じ方向であるので、 $D = |\vec{D}|$ （ベクトルの大きさ）とすれば

$$2D = q$$

を得る。これから電界の大きさ E は

$$E = \frac{q}{2\epsilon}$$

となる。

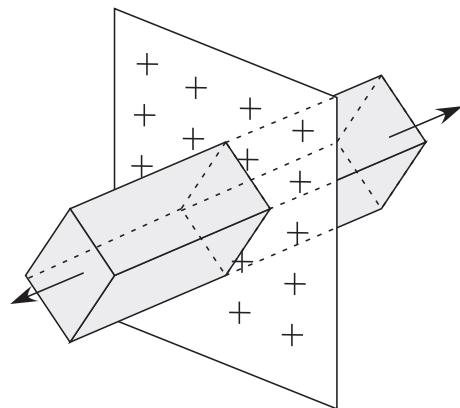


図 3.5：均質電荷を有する無限平板

図 3.4 の平行平板の場合は、 $-q$ の電荷をもつ平板が作る電界がこれに加わるので（正の電荷を有する平板と負の電荷を有する平板がそれぞれつくる電界は同方向であることに注意）、電界の大きさはその 2 倍になり

$$E = \frac{q}{\epsilon}$$

である。平板の間隔を δ とすれば、電位差 v は

$$v = E\delta = \frac{q\delta}{\epsilon}$$

であることがわかる。

距離 δ 離れた平行平板の面積を S として、二枚の平板に蓄えられる時刻 t における電荷をそれぞれ $Q(t)$,

$-Q(t)$ とする．このとき平板間の電界は，理想的な場合でモデル化できるとすれば， $q = Q/S$ となるので，電位差は

$$v(t) = \frac{Q(t)\delta}{\epsilon S}$$

である．電荷の変化量が流れる電流 $i(t)$ になるので，

$$i(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = \frac{\epsilon S}{\delta} \frac{dv}{dt}(t) \quad (3.2)$$

を得る．これは平行平板コンデンサの動的モデルとなっている．

キャパシタは動的な回路素子であり，素子に流れ込む電流 $i(t)$ と素子両端に加わる電位差 $v(t)$ の時間微分は比例関係にある．つまり

$$i(t) = C \frac{dv}{dt}(t) \quad (3.3)$$

という関係をもっている．比例係数 C をキャパシタンスという．式 (3.2) で表される平行平板コンデンサの場合には

$$C = \frac{\epsilon S}{\delta}$$

与えられる．キャパシタは図 3.6 のように表記する．

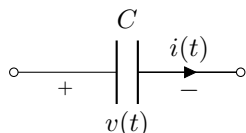


図 3.6 : キャパシタ

3.1.3 インダクタ

まず図 3.7 で表されるような導線に変化する電流を与えると磁束変化が起こり，起電力が発生する．詳しくは文献 [0] を参照されたい．以下ではその概略を述べる．磁束が時間変化すると起電力が生じる（ファラデーの法則 (Faraday's law)）．つまり磁束密度を \vec{B} ，電界を \vec{E} として閉曲線 C で囲まれた曲面 S についてを考える． S の法線ベクトルを \vec{n} ，曲面の接線ベクトルを \vec{t} とする．ストークスの定理 (Stokes' theorem) より

$$\int_C \vec{E} \cdot \vec{t} ds = \int_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot \vec{n} dS \quad (3.4)$$

である．一方，

$$\begin{aligned} \int_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot \vec{n} dS &= - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{n} dS \\ &= - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS \end{aligned} \quad (3.5)$$

を得る．ここで式 (3.4) の左辺は，自己インダクタンスによる逆起電力 v_e を示している．また式 (3.5) の右辺下側の積分は， S を貫く磁束に等しく，アンペールの定理よりそれは，電流 i に比例する．その比例定数を L とおけば，逆起電力 $v_e(t)$ は

$$v_e(t) = -L \frac{di(t)}{dt} \quad (3.6)$$

となる．ここで逆起電力により，電流が増加しようとするとき，それを抑える向きに逆起電力が発生すること

に注意したい．比例係数 L をインダクタンスという．一般には，コイルは何重にも導線を巻いてできているが，その場合は磁束は S を貫く磁束の総量と読み直せばよく，比例定数 L を適当に定めるとやはり式 (3.6) が成り立つ．

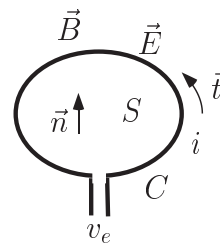


図 3.7 : 自己インダクタンス

インダクタを動的な回路素子であるとみなし，素子に流れ込む電流 $i(t)$ と素子両端の電位差 $v(t)$ の関係を考える．逆起電力と電位差には $v(t) = -v_e(t)$ が成り立つので，結局

$$v(t) = L \frac{di}{dt}(t) \quad (3.7)$$

である．インダクタは図 3.8 のように表記する．

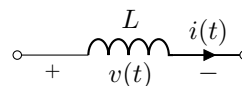


図 3.8 : インダクタ

3.2 キルヒホッフの法則

回路の電圧および電流は，それぞれキルヒホッフの電圧則と電流則とよばれる式を満たす．これらは回路の構造によって決まる式である．

3.2.1 キルヒホッフの電圧則

一般的に電気回路内には，複数の閉路が存在することになる．キルヒホッフの電圧則は，任意の閉路に沿った電位差の和が 0 であることを述べている．たとえば，図 3.9 に関しては，

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 0$$

が成り立つ．

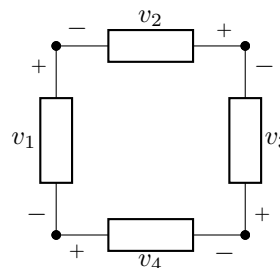


図 3.9 : キルヒホッフの電圧則

一般的には回路中には閉路は複数考えられる．回路の構造を表すために，節点集合 N と枝集合 $E \subset N \times N$ をもつグラフ $G(N, E)$ を考える．枝には向きがあるものとし， $e = (n_a, n_b)$ のとき， n_a を e の始点， n_b を e の終点とよぶことにする．枝が回路素子に相当す

る．グラフについてはたとえば文献 [C] などを参照されたい．

グラフ $G(N, E)$ の節点 n_a と n_b に対して，節点 n_0, n_1, \dots, n_ℓ を $n_0 = n_a, n_\ell = n_b$ とし， $(n_j, n_{j+1}) \in E$ または $(n_{j+1}, n_j) \in E, j = 0, 1, \dots, \ell - 1$ のいずれかが成り立つようにとれるとき，それらの枝の集まりを節点 n_a と n_b を結ぶ道 (path) という．特に $n_a = n_b$ となっている道が閉路 (loop または circuit) である．グラフ $G(N, E)$ が連結 (connected) であることを任意の二節点を結ぶ道 (path) があることと定める．グラフの連結成分 (component) は，連結な部分グラフでその枝集合が極大であるものという．

たとえば図 3.10 のグラフを考えると，これは連結なグラフである．また枝を e_1, e_3, e_4, e_2 の順に回る閉路，枝を e_1, e_5, e_2 の順に回る閉路，枝を e_3, e_4, e_5 の順に回る閉路の三つがある．枝 e_k の始点の電位と終点の電位の差を v_k とすると，キルヒホッフの電圧則はそれぞれの閉路に応じて

$$v_1 + v_3 + v_4 - v_2 = 0 \quad (3.8)$$

$$v_1 - v_5 - v_2 = 0 \quad (3.9)$$

$$v_3 + v_4 + v_5 = 0 \quad (3.10)$$

となる．しかし式 (3.9) と (3.10) を加えると式 (3.8) が得られることからわかるように，これらの式は独立ではない．この場合，独立な式の数は二つになっている．

これらのことを一般的に考えるためにグラフの接続行列 (incidence matrix) を導入する．接続行列 A は接点数 $|N|$ の行数と枝数 $|E|$ の列数をもつ行列であり，接点 n_j が枝 e_k の始点であれば， $a_{jk} = 1$ ，接点 n_j が枝 e_k の終点であれば， $a_{jk} = -1$ とする．また枝 e_k が節点 n_j に接続していなければ $a_{jk} = 0$ と定める．たとえば図 3.10 のグラフであれば，

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

である．

一般に接続行列 A の各列には 1 と -1 が一つずつあるので，行をすべて加え合わせると 0 になる．つまり A の $|N|$ 本の行は一次従属であるので， $\text{rank } A \leq |N| - 1$ であることに注意する．ここでグラフ $G(N, E)$ は連結であるとする．このときには， $\text{rank } A = |N| - 1$ となることを説明しておく．グラフ $G(N, E)$ の連結な部分グラフで閉路をもたないものを木 (tree) という．特に節点集合 N のすべてにその木の少なくとも一つの枝が出るまたは入るとき，その木を全域木 (spanning tree) という．全域木を一つ選び，その枝集合を $E_T \subset E$ とする． $|E_T| = |N| - 1$ である．この木の上で，節点 $n_{|N|}$ を基準節点とし，木に含まれる枝 e_j と e_k が e_j の始点から基準節点に木を通して向かうときに e_k を通るならば $e_j \prec e_k$ と定める．このように定めた関係は，半順序になる．そこでこの半順序にしたがって A の列を並びかえて順序の小さなものが左側に来るようにすると， A の最初の $|N| - 1$ 列からなる小行列は，対角上に 1 または -1 が並び，対角線より上は 0 となるので，これは最大列階数をもつ．この

ことは $\text{rank } A \geq |N| - 1$ を示している．一般的に $\text{rank } A \leq |N| - 1$ であるので， $\text{rank } A = |N| - 1$ が成り立つ．

グラフが連結であるとき

$$Ab = 0 \quad (3.11)$$

を満たすベクトル b の全体は $|E| - |N| + 1$ 次元部分空間にはいつていることになる．ここでグラフの有向閉路 L に対して $|E|$ の行数をもつベクトル b を枝 e_j が L に含まれ向きが同じであれば b の第 j 要素を 1，枝 e_j が L に含まれ向きが逆であれば b の第 j 要素を -1 ，枝 e_j が L に含まれないならば b の第 j 要素を 0 として定めると，式 (3.11) が成り立つことがわかる．実際， Ab の第 j 行めは節点 n_j に有向閉路 L が出ていく回数と入り込む回数の差になっており，閉路の性質からそれは 0 である．

グラフが連結であるときに，全域木を固定し，その枝集合を E_T とする． $e \in E \setminus E_T$ であれば， $\{e\} \cup E_T$ は，閉路を一つ含むので，式 (3.11) を満たす解 b を作るができる．このようにして， $|E| - |E_T| = |E| - |N| + 1$ 個の解を得るが，これらが一次独立になることに注意する．実際，枝 $\{e\} \cup E_T$ が含まれる閉路は， e 以外の枝はすべて全域木の枝であるので， e に相当する b の成分が非零になるのは， e が含まれているときにしかない．したがって $|E| - |N| + 1$ 個の解の一次結合をとって零ベクトルにするためには，係数がすべて零でなくてはならない．このように全域木を固定して， $e \in E \setminus E_T$ によって作られた閉路を基本閉路 (fundamental circuit) とよぶ．

以上をまとめるとキルヒホッフの電圧則は，独立なもの個数は $|E| - |N| + 1$ 個あり，それらは全域木を固定したときの基本閉路に対応していることがわかる．

たとえば，図 3.10 のグラフを考えると，三つの閉路に応じて式 (3.8)–(3.10) を得る．しかし枝集合 $E_T = \{e_1, e_3, e_4\}$ から作られる全域木を考える場合，基本閉路は $\{e_1, e_3, e_4, e_2\}$ と $\{e_3, e_4, e_5\}$ から作られ，式 (3.8), (3.10) が独立な方程式として与えられる．

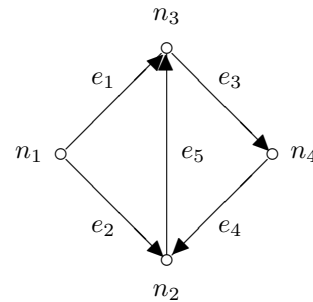


図 3.10 : グラフ

3.2.2 キルヒホッフの電流則

一般的に電気回路内には，複数の節点が存在することになる．キルヒホッフの電流則は，任意の節点から流れ出る電流の和が 0 であることを述べている．たとえば，図 3.11 に関しては，

$$i_1 + i_2 + i_3 = 0$$

が成り立つ．

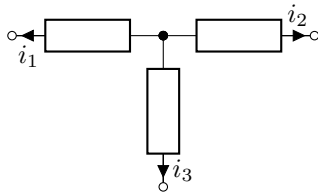


図 3.11：キルヒホッフの電流則

一般的に考える前に，図 3.10 であらわせる回路を考える．ここで枝 e_j の向きと同じ方向に電流 i_j を取ることにする．節点は 4 つあるので，電流の向きを考慮すれば

$$i_1 + i_2 = 0 \quad (3.12)$$

$$-i_2 - i_4 + i_5 = 0 \quad (3.13)$$

$$-i_1 + i_3 - i_5 = 0 \quad (3.14)$$

$$-i_3 + i_4 = 0 \quad (3.15)$$

を得る．しかし式 (3.12)–(3.15) を加え合わせれば左辺は 0 となり自明な式となっている．つまりこれら 4 つの式は独立ではない．また式 (3.12), (3.14) を加えると

$$i_2 + i_3 - i_5 = 0 \quad (3.16)$$

を得るが，これは節点集合 $\{n_1, n_3\}$ と $N \setminus \{n_1, n_3\} = \{n_2, n_4\}$ を結ぶ枝について，出ていくほうを正と考えて電流の和を考えた式になっている．

一般的に枝集合の部分集合で，それらの枝を除去すると連結成分の個数が 1 増えるとき，それをカットセット (cutset) という．またそれらの枝を除去することによって連結成分の個数が増えるとき，それをカット (cut) という．グラフ $G(N, E)$ の節点の部分集合 $N_1 \subset N$ とその補集合 $N_2 = N \setminus N_1$ の間に少なくとも一つの枝があるとす．このとき一方の節点を N_1 に，他方の節点を N_2 にもつ枝を除去すると，連結成分の個数は増える．このようなカットに対して，電流則を考えることができるが，そのときの行列 A の N_1 に相当する行をすべて加えたベクトルの枝 e_j に対する成分が電流 i_j の係数になっている．したがって独立な方程式は， A の一次独立な行の数を超えることはない．グラフ $G(N, E)$ が連結であるとき $\text{rank } A = |N| - 1$ であるので，その数は $|N| - 1$ である．

グラフ $G(N, E)$ が連結であるとき，全域木を固定する．その枝集合を $E_T \subset E$ とし， $e \in E_T$ は選ぶと，全域木は e の始点を含む成分と終点を含む成分の二つに分けられる．このときこれらの成分間の枝集合はカットセットである．このように構成されたカットセットを基本カットセット (fundamental cutset) という．基本カットセットは全域木の枝数つまり $|N| - 1$ 個あることに注意する．

たとえば，図 3.10 のグラフにおいて枝集合 $E_T = \{e_1, e_3, e_4\}$ から作られる全域木を考える．基本カットセットは $\{e_1, e_2\}$, $\{e_2, e_3, e_5\}$, $\{e_2, e_4, e_5\}$ である．これに対応して式 (3.12), (3.16), (3.13) が独立な方程式として与えられる．

3.3 簡単な電気回路の応答

まず本節では，簡単な電気回路の例として RC 回路および RL 回路を取り上げ，それらの挙動を記述する微分方程式を導く．次のその微分方程式の解を与えて，その特徴を見ることにする．このクラスは，後述する一次系とよばれるクラスになっている．

3.3.1 RC 回路

抵抗とキャパシタからなる回路を考え，その動的な振る舞いを記述することにする．

電源のない場合 まず，図 3.12 を考える．ここで v_C はキャパシタ電圧， i_C はキャパシタ電流， v_R は抵抗電圧， i_R は抵抗電流である．この回路は，素子特性 (抵抗とキャパシタ) ならびにキルヒホッフの電流則，電圧則によって記述される．

$$v_R(t) = Ri_R(t) \quad (3.17)$$

$$i_C(t) = C \frac{dv_C}{dt}(t) \quad (3.18)$$

$$i_R(t) = -i_C(t) \quad (3.19)$$

$$v_R(t) = v_C(t) \quad (3.20)$$

式 (3.17)–(3.20) から変数 v_R, i_R, i_C を消去すれば

$$RC \frac{dv_C}{dt} + v_C = 0 \quad (3.21)$$

を得る．式 (3.21) はキャパシタ電圧に関する 1 階線形微分方程式になっていることに注意する．

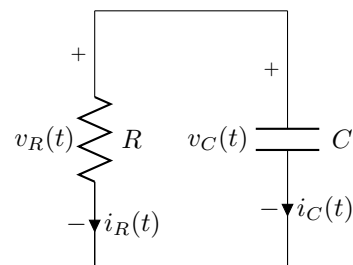


図 3.12：RC 回路 (電源なし)

式 (3.21) の解は

$$\frac{dv_C}{v_C} = -\frac{dt}{RC}$$

の両辺を時刻 0 から t まで積分して

$$\log v_C(t) - \log v_C(0) = -\frac{t}{RC}$$

を得るので，この両辺の指数をとれば

$$\begin{aligned} \exp(\log v_C(t) - \log v_C(0)) &= \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \\ v_C(t) &= v_C(0) \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \end{aligned} \quad (3.22)$$

となる．

式 (3.22) よりキャパシタ電圧は時間の指数関数であり， RC が小さいほど速く減少することがわかる．さらに次の考察から RC のもつ意味は明瞭になり，時定

数とよばれている．もし電位差 v_C が初期時刻 $t = 0$ における減少率のまま減り続けるとすると，初期状態 $v_C(0)$ のいかにかわからず $t_0 = RC$ において $v_C = 0$ になる．実際，

$$\begin{aligned} \frac{dv_C}{dt}(0) &= -\frac{v_C(0)}{RC} \exp\left(-\frac{0}{RC}\right) \\ &= -\frac{v_C(0)}{RC} \end{aligned}$$

であるから， $t = 0$ での $v_C(t)$ の接線が $v_C = 0$ と交わる点 t_0 を求めると

$$0 = -\frac{v_C(0)}{RC} t_0 + v_C(0)$$

となるからである．図 3.13 に $RC = 0.1$ として， $v_C(0) = 1$ および $v_C(0) = 2$ としたときのシミュレーション結果を示す．接線をそれぞれ破線で示すが，いずれも $t_0 = 0.1$ で軸を横切っていることがわかる．

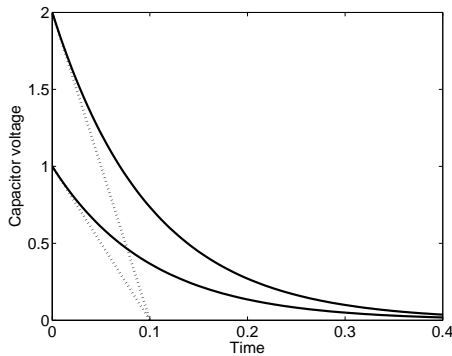


図 3.13：RC 回路の初期値応答

式 (3.22) から解を時間軸方向に移動させても解であることわかる．つまり

$$\begin{aligned} v_C(t+T) &= v_C(0) \exp\left(-\frac{t+T}{RC}\right) \\ &= v_C(0) \exp\left(-\frac{T}{RC}\right) \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \end{aligned}$$

となるが，これは初期値を $v_C(0) \exp(-\frac{T}{RC})$ としたときの応答になっている．図 3.14 に $RC = 0.1$ のとき，初期値 $v_C(0) = 1$ としたときの応答を実線として， $T = 0.1$ 以降の応答を太い実線で表す．その $T = 0.1$ 以降の応答を左に 0.1 移動したときの応答初期値 $e^{-1} \approx 0.368$ のときの応答（これを破線で表す）に等しいことがわかる．

方程式 (3.21) のもう一つの特徴は， $v_C = v_1, v_C = v_2$ がともに微分方程式の解であれば， a_1, a_2 を実数として $v_C = a_1 v_1 + a_2 v_2$ もまた解になることである．これを重ね合わせの原理という．

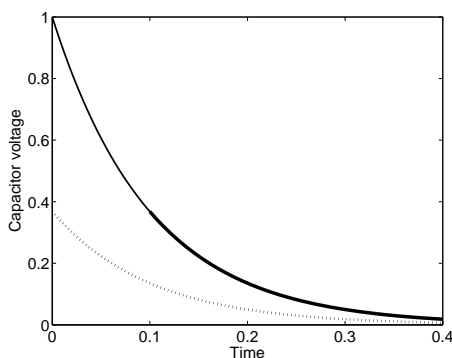


図 3.14：RC 回路応答の移動

直流電源の場合 RC 回路に一定電圧となる直流電源が加わっている場合（図 3.15 参照）を考える．この場合も回路を記述する方程式は素子特性（抵抗とキャパシタ）ならびにキルヒホッフの電流則，電圧則によって記述される．

$$v_R(t) = Ri_R(t), \quad (3.23)$$

$$i_C(t) = C \frac{dv_C}{dt}(t), \quad (3.24)$$

$$i_R(t) = -i_C(t), \quad (3.25)$$

$$v_C(t) = v_R(t) + E. \quad (3.26)$$

式 (3.23)–(3.26) から変数 v_R, i_R, i_C を消去すれば

$$RC \frac{dv_C}{dt} + v_C = E \quad (3.27)$$

を得る．式 (3.27) は，キャパシタ電圧に関する外部入力のある 1 階線形微分方程式になっていることに注意する．

式 (3.27) の平衡点（定常電位）は $dV_C/dt = 0$ において $V_{Ce} = E$ であるので，定常電位との差をあらためて変数にとり $w = v_C - E$ とおく． w に関しては，

$$\frac{dw}{dt} = \frac{d}{dt}(v_C - E) = \frac{d}{dt}v_C$$

に注意すれば，電源がない場合の微分方程式を同じ形の

$$RC \frac{dw}{dt} + w = 0$$

が成り立っている．したがって

$$w(t) = w(0) \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

である．これより

$$\begin{aligned} v_C(t) &= w(t) + E \quad (3.28) \\ &= w(0) \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) + E \\ &= v_C(0) \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \\ &\quad + E \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \right\} \end{aligned}$$

が成り立っている．第 1 項は初期値応答，第 2 項は入力に対する応答である．

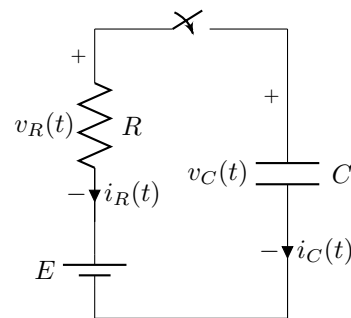


図 3.15：RC 回路（直流電源つき）

一般の電源の場合 RC 回路にかならずしも一定ではない電圧となる電源が加わっている場合（図 3.16 参照）を考える．この場合も回路を記述する方程式は素

子特性（抵抗とキャパシタ）ならびにキルヒホッフの電流則，電圧則によって記述され，それは式 (3.26) の右辺にある E が定数ではなく時間関数 $E(t)$ になることを除いては，直流電源の場合と同じである．以下，同様の变形をして

$$RC \frac{dv_C}{dt} + v_C = E \quad (3.29)$$

を得る．式 (3.29) は，キャパシタ電圧に関する外部入力のある 1 階線形微分方程式になっていることに注意する．

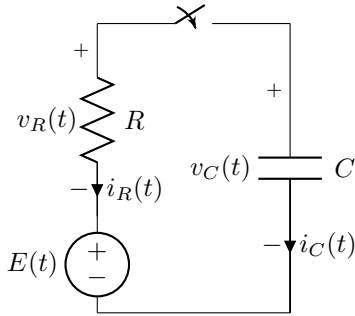


図 3.16 : RC 回路 (電源つき)

式 (3.29) の解を求めるために，

$$v_C(t) = w(t) \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \quad (3.30)$$

と新しい変数 w を用いて電位差を表す．式 (3.30) より

$$\begin{aligned} \frac{dv_C}{dt}(t) &= \left(\frac{dw}{dt}(t)\right) \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \\ &\quad - \frac{w(t)}{RC} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right). \end{aligned}$$

であるので，これを式 (3.29) に代入して

$$\begin{aligned} RC \left(\frac{dw}{dt}(t)\right) \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \\ - w(t) \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \\ + w(t) \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) = E(t) \end{aligned}$$

を得る．つまり w に対しては

$$\left(\frac{dw}{dt}(t)\right) = \frac{1}{RC} \exp\left(\frac{t}{RC}\right) E(t) \quad (3.31)$$

が成り立つ．これは積分することにより

$$w(t) - w(0) = \int_0^t \exp\left(\frac{\tau}{RC}\right) \frac{E(\tau)}{RC} d\tau$$

であるので，変数をもとの v_C に戻すことにより

$$\begin{aligned} v_C(t) &= v_C(0) \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \\ &\quad + \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \int_0^t \exp\left(\frac{\tau}{RC}\right) \frac{E(\tau)}{RC} d\tau \\ &= v_C(0) \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \\ &\quad + \int_0^t \exp\left(-\frac{t-\tau}{RC}\right) \frac{E(\tau)}{RC} d\tau \quad (3.32) \end{aligned}$$

が成り立っている．第 1 項は初期値応答，第 2 項は入力に対する応答である．第 2 項はたたみ込み積分になっている．

3.3.2 RL 回路

抵抗とインダクタからなる回路を考え，その動的な振る舞いを記述することにする．ここでは図 3.17 の回路を考える．ここで v_L はインダクタ電圧， i_L はインダクタ電流， v_R は抵抗電圧， i_R は抵抗電流， i_E は電源電流， E は電圧源電位である．

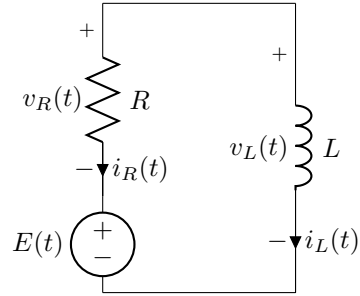


図 3.17 : RL 回路

回路を記述する方程式は，素子特性（抵抗，インダクタンス）とキルヒホッフの電流則，電圧則である．

$$v_R(t) = Ri_R(t), \quad (3.33)$$

$$v_L(t) = L \frac{di_L}{dt}(t), \quad (3.34)$$

$$i_R(t) = -i_L(t), \quad (3.35)$$

$$v_L(t) = v_R(t) + E(t). \quad (3.36)$$

式 (3.33)–(3.36) から変数 v_R , i_R , v_L を消去すれば

$$\frac{L}{R} \frac{di_L}{dt} + i_L = \frac{E}{R} \quad (3.37)$$

を得る．式 (3.37) は，インダクタ電流に関する外部入力 $E(t)$ が存在する 1 階線形微分方程式になっている．その性質や解は 3.3.1 節で見たとおりである．

3.4 非線形素子

これまで述べてきた抵抗，キャパシタンス，インダクタンスはすべて線形素子とよばれる分類に属する．つまり電圧と電流の関係は，線形になっている．しかし，電子回路の中には，非線形特性を示すものも多い．ここではそのような例として，pn 接合ダイオードとトンネルダイオードを取り上げることにする．なお，本節は [H, UT] などを参照されたい．

3.4.1 pn 接合ダイオード

電気伝導に寄与するキャリアが，主として電子である半導体を n 型半導体，主として正孔である半導体を p 型半導体という．シリコンは原子番号 14 の 4 価の原子で，最外殻に 4 個の電子をもっている．シリコンに 5 価の不純物原子リンやヒ素を混ぜると n 型半導体になる．また 3 価の不純物原子ホウ素を混ぜると p 型半導体になる．

p 型半導体と n 型半導体を接合させてできる電気素子を pn 接合ダイオードという．接合付近で p 型半導体の正孔は n 型半導体へ拡散し，逆に n 型半導体の電子は p 型半導体へ拡散することになる．結果として

接合部分に空乏層とよばれるキャリアのない部分が生じる。

外部から p 型半導体に正, n 型半導体に負の電圧を加えると, p 型半導体の正孔は空乏層を超えて n 型半導体へ, n 型半導体の電子は空乏層を超えて p 型半導体へ流れてダイオードには電流が流れる. このとき順方向バイアスをかけるといふ. 一方, 外部から p 型半導体に負, n 型半導体に正の電圧を加えると, 多数キャリアである p 型半導体の正孔, n 型半導体の電子ともに電極側に引き寄せられる. それぞれの半導体の少数キャリアのみが空乏層を超えることになるが, その量は小さいのでダイオード電流はほとんど流れない. このとき逆方向バイアスをかけるといふ. このように pn 接合ダイオードには, 整流作用がある.

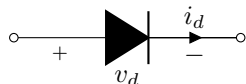


図 3.18 : pn 接合ダイオード

pn 接合ダイオードの印加電圧 v_d と電流 i_d の間には, 理想的には

$$i_d = i_s \left\{ \exp\left(\frac{v_d}{Nv_T}\right) - 1 \right\} \quad (3.38)$$

$$v_T = \frac{kT}{q}$$

の関係がある. ここで i_s は飽和電流, N は放出係数, T は温度, k はボルツマン定数 ($1.381 \times 10^{-23} \text{ J/K}$), q 電子電荷 ($1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$) である. v_T は 30°C では約 26mV になる. 式 (3.38) の関係を図 3.19 に示す.

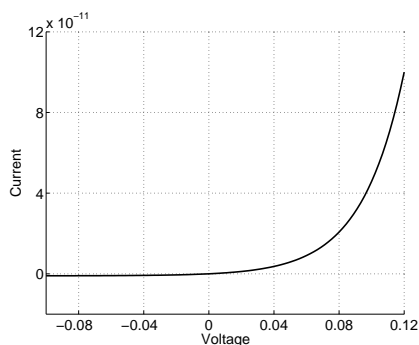


図 3.19 : pn 接合ダイオードの電圧電流特性

3.4.2 トンネルダイオード

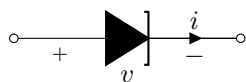


図 3.20 : トンネルダイオード

トンネルダイオード (図 3.20) の電圧電流特性は, 図 3.21 に示すように, 電圧が大きくなると電流が減少する部分, いわゆる負性抵抗の特性を示す部分が存在する. このために, トンネルダイオードを含む回路は, 非線形特性が重要な鍵になってくる.

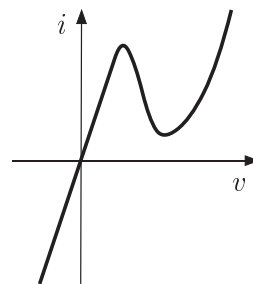


図 3.21 : トンネルダイオードの電圧電流特性

電圧電流の特性は, 簡単な関数で記述できるわけではないが, 非線形特性の影響を大まかに理解するためには, 3 次関数

$$i_d = c_1 v_d - c_2 v_d^2 - c_3 v_d^3 =: g(v_d) \quad (3.39)$$

で近似することがしばしば行われている. ただし $c_1 > 0, c_2 > 0, c_3 > 0$ である.

たとえばトンネルダイオードを用いた回路 (図 3.22) を考える. このとき以下の式が成り立つ. ただし $G_1 = R_1^{-1}, G_2 = R_2^{-1}, G_3 = R_3^{-1}$ はコンダクタンスである. これを用いて動作点の解析などができる. 練習問題【3】を参照してほしい.

$$L \frac{di}{dt} = v \quad (3.40)$$

$$\left(G_3 v + C \frac{dv}{dt} + i \right) = g(v_d) \quad (3.41)$$

$$(G_1 + G_2)(v + v_d) + g(v_d) = G_1 E \quad (3.42)$$

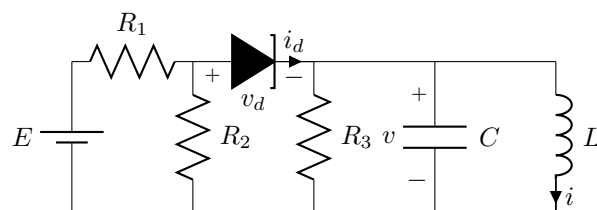


図 3.22 : トンネルダイオードを含む回路

参考文献

- [C] Wai-Kai Chen, *Applied Graph Theory: Graphs and Electrical Networks*, 2nd edition, North Holland, 2014
- [H] 原田 豊, 図説電子回路工学, 丸善, 2000
- [O] 岡崎 誠, 電磁気学入門, 裳華房, 2005
- [UT] 牛田 明夫, 田中 衛, 電子回路シミュレーション, 現代非線形科学シリーズ, コロナ社, 2002

練習問題

- 【1】 図 3.17 の RL 回路の挙動を求めよ. ただし電源 E は $E(t) = E_0$ となる一定電圧であるとす, インダクタの初期電流を $i_L(0) = i_0$ とせよ.
- 【2】 pn 接合ダイオードを含む回路が図 3.23 で与えられているとする. ダイオードの特性は, 式 (3.38) で与えられるものとし, $v_T = 26\text{mV}, N = 1, i_s = 1\text{pA}$

とする．また $E = 600\text{mV}$, $R_1 = 10\Omega$, $R_2 = 20\Omega$ とする．このとき平衡点（動作点）を求めよ．さらにその点での線形近似モデルを求めよ．計算機を用いて数値計算をして近似値を求めてよい．

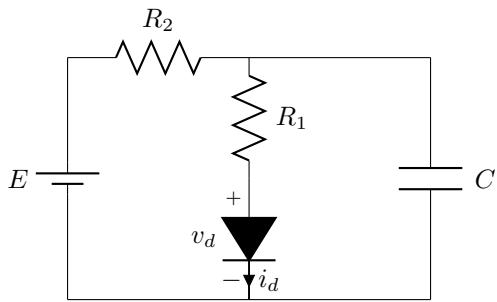


図 3.23 : pn 接合ダイオードを含む回路

【3】 図 3.22 のトンネルダイオードを含む回路をモデル化して式 (3.40)–(3.42) を導け．その平衡点（動作点）を求めて，その点での線形近似モデルを求めよ．