

## 4 機械要素のモデリング

### 4.1 ばねとダンパー

機械システムの動特性解析として、ばねとダンパーの結合系は、頻繁に用いられている。単にばねとダンパーという単体として重要なだけでなく、多くの振動系は、ばね的な要素をダンパー的な要素を考えてモデル化されることに注意する必要がある。まず、ばねとダンパーの特性を述べておく。

#### 4.1.1 ばね

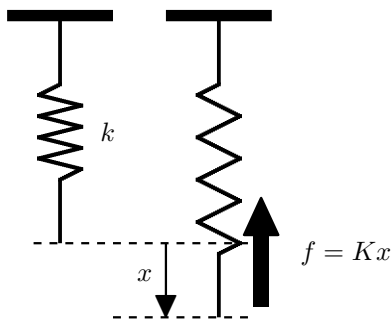


図 4.1：ばね

ばね（線形ばね）は変位に比例した力を発生する要素としてモデル化される（図 4.1 参照）。つまり弾性範囲内の変形に対してフックの法則が成り立つ場合を考えている。ヘリカルコイルなどを線形ばねとしてモデル化することが多い。

#### 4.1.2 ダンパー

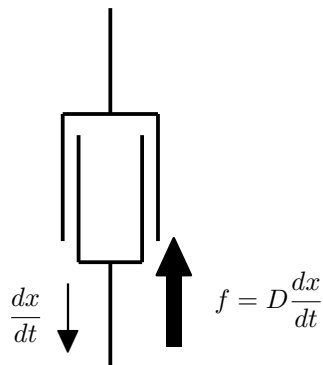


図 4.2：ダンパー

ダンパー（線形ダンパー）は速度に比例した力を発生する要素としてモデル化される（図 4.2 参照）。これは、ダッシュポットともよばれている。また粘性抵抗のモデルにもなっている。シリンダ内に非圧縮性液体の流体抵抗を利用したショックアブソーバなどをダンパーを用いてモデル化する。

#### 4.1.3 ばねとダンパーの結合

固定された向かい合った壁にばねとダンパーの一端をそれぞれつなぎ、他端を直接結合する（図 4.3 参照）。

このときばねの自然の長さからの変位を  $x$  とすれば力のつりあいより

$$D \frac{dx}{dt} + Kx = 0 \quad (4.1)$$

を得る。これは 1 階の線形微分方程式である。解は 3.3.1 節での RC 回路との対応を考えると

$$x(t) = x(0) \exp\left(-\frac{K}{D}t\right) \quad (4.2)$$

で与えられることがわかる。

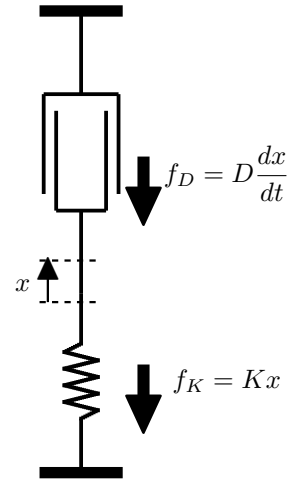


図 4.3：ばねとダンパーの直接結合

### 4.2 電気回路素子との関連

電気回路素子については、3.1 節で述べたように、そこを流れる電流と両端の電圧の関係をもとに抵抗、キャパシタ、インダクタなどの区別をした。ばねとダンパーを電気回路素子との類推を行うにはどのように考えればよいだろうか。

機械的な二端子対を考えるときに、電気的素子の端子の電圧差を機械的素子の端子の速度差に、電気的素子に流れる電流を機械的素子に発生する力に対応付けることが考えられる。これは電圧と電流の積も力と速度の積もともに仕事率になっていることから納得がいく。この場合、ばねとインダクタが対応し、ダンパーと抵抗が対応することになる。

この意味で 3.3.2 節での RL 回路との対応を考えてみる。図 3.17 および式 (3.36) で  $E = 0$  とする。式 (3.33),(3.34) から

$$i_R = \frac{1}{R}v_R, \quad i_L = \frac{1}{L} \int v_L dt$$

であるが、式 (3.35),(3.36) より

$$\frac{1}{R}v_L + \frac{1}{L} \int v_L dt = 0$$

である。これは式 (4.1) と  $v_L$  と  $(dx/dt)$  を関連付けて対応させることができる。

なお、キャパシタに対応する機械的素子については、文献 [S] を参考にされたい。

### 4.3 回転系

#### 4.3.1 回転運動の方程式

ここではある点(軸)のまわりに回転する物体の運動をもとに、回転系にあらわれる機械要素を考える。回転運動においては、角運動量の時間変化は外力によるモーメントに等しい[A]。つまり図4.4のように原点Oから $\vec{r}$ に位置にある質点に力 $\vec{F}$ が働くとする。質点の運動量を $\vec{p}$ とする。このとき $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ (ただし $\times$ はベクトル外積を表す)を質点の原点まわりの角運動量という。このとき運動の方程式は

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (4.3)$$

となる。右辺の $\vec{r} \times \vec{F}$ を原点まわりのトルクという。

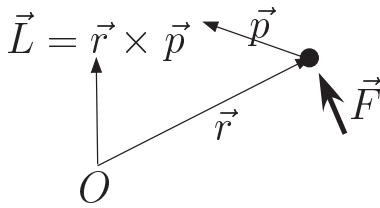


図4.4: 回転運動

次に回転軸が固定された回転系を考える(図4.5)。図4.4の質点が微小要素としてより集まって回転角速度 $\omega$ で軸周りに回転する円盤を形成していると考えられる。回転軸まわりのトルクの総和を $N$ 、回転軸周りの慣性モーメントを $J$ とすると式(4.3)は

$$J \frac{d\omega}{dt} = N \quad (4.4)$$

となる。

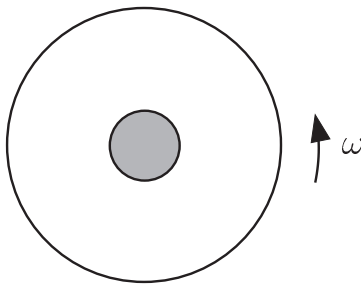


図4.5: 回転軸の固定された回転系

#### 4.3.2 回転運動の機械要素

回転軸のまわりに回転する機械系を考える。回転軸のまわりに発生するトルクが回転軸の捻り量に比例する機械要素をトーションばねという。このとき回転角 $\theta$ と発生するトルク $N$ の間に

$$N = K\theta$$

の関係がある。また回転角速度 $\omega$ と発生するトルク $N$ が比例する機械要素をトーションダンパーという。このときには

$$N = D\omega$$

が成り立っている。 $D$ は粘性抵抗を表す。

#### 4.3.3 回転系の運動

図4.6に示す回転系を考える。ここで $J$ は回転軸まわりの慣性モーメント、 $D$ は粘性抵抗を表し、 $\omega$ は回転角速度、 $T$ は回転軸に与えられるトルクとする。

回転に関する運動方程式は、慣性モーメントと角加速度の積が加わる総トルク(粘性抵抗も考える)に等しいので、

$$J \frac{d\omega}{dt} + D\omega = T \quad (4.5)$$

となっている。これは1階の線形微分方程式である。この微分方程式は、

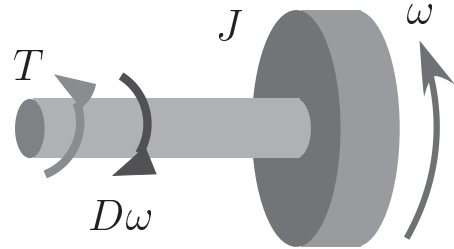


図4.6: 回転系

### 4.4 倒立振り子

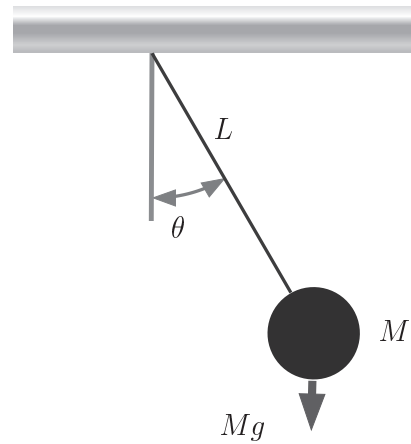


図4.7: 振り子

図4.7の振り子を考える。次の仮定をおく。

- 質量は振り子先端にある質点である。
- 振り子と支点の間は質量がなく、伸縮しない線で結ばれている。
- 支点では摩擦は存在しない。

まず物理法則を記述する。支点まわりの慣性モーメントを $J$ 、トルクを $T$ とすれば、

$$J = ML^2, \quad (4.6)$$

$$T = -MgL \sin \theta, \quad (4.7)$$

$$J \frac{d^2}{dt^2} \theta = T. \quad (4.8)$$

が成り立つ。式(4.6),(4.7)を(4.8)に代入すれば

$$L \left( \frac{d^2 \theta}{dt^2} \right) = -g \sin \theta. \quad (4.9)$$

を得る。

ここで状態ベクトルを

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ \frac{d}{dt}\theta \end{bmatrix}, \quad (4.10)$$

非線形関数を

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{L} \sin x_1 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

とおくと、式 (4.9) は、非線形状態方程式

$$\frac{d}{dt}x = f(x) \quad (4.12)$$

を得る。

式 (4.11) の  $f$  について  $f(x) = 0$  を満たす点  $x_e$  は、振り子モデル (4.12) の平衡点である。つまり  $x(t) \equiv x_e$  は初期値  $x(0) = x_e$  を満たす微分方程式 (4.12) の解である。平衡点は

$$x_e = \begin{bmatrix} x_{1e} \\ x_{2e} \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

$$x_{1e} = k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$x_{2e} = 0$$

で与えられる。 $k$  偶数のときには振り子は下向きに停止し、 $k$  奇数のときには振り子は上向きに停止している。

これらの平衡点において、非線形状態方程式 (4.12) の線形近似モデルを構成する。

$$f(x_e + z) = f(x_e) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_e)z + O(|z|^2)$$

を用いて、一次項のみで近似すると

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{L} \cos x_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

である。ここで平衡点 (4.13) を代入すると  $k$  が偶数のときには線形近似モデルは

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_2 \\ -\frac{g}{L} z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

で表され、 $k$  が奇数のときには、

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_2 \\ \frac{g}{L} z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

で表される。式 (4.15), (4.16) を見比べてもわかるように、どの平衡点で線形モデルを構成するかによって異なった線形モデルが得られていることに注意する。

非線形状態方程式と線形状態方程式の挙動の違いをシミュレーションで確認しておく。非線形状態方程式は Runge-Kutta (4.5) を用いて、線形状態方程式は Matlab の `lsim` を用いて解く。振り子の初期角速度はいずれも  $0 \text{ rad/s}$  であるとして、初期角度と用いる線形モデルを表 4.1 のように選ぶ。

表 4.1 : シミュレーションの設定

| 番号    | 初期角度      | 用いるモデル |
|-------|-----------|--------|
| (i)   | $0.1\pi$  | (4.15) |
| (ii)  | $0.4\pi$  | (4.15) |
| (iii) | $0.9\pi$  | (4.15) |
| (iv)  | $0.9\pi$  | (4.16) |
| (v)   | $0.98\pi$ | (4.16) |

シミュレーション結果を図 4.8–4.12 に示す。いずれも非線形状態方程式による角度を実線、線形状態方程式による角度を点線で表す。

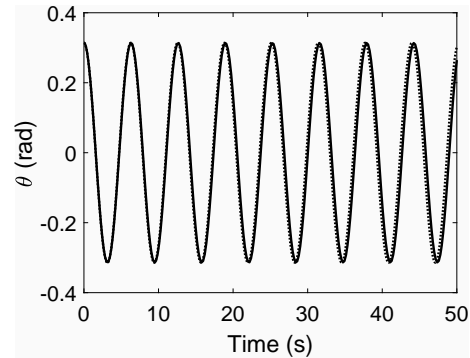


図 4.8 : 振り子シミュレーション (i)

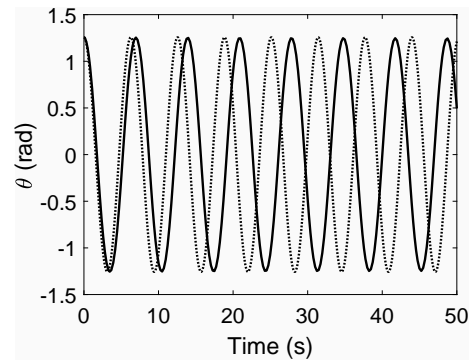


図 4.9 : 振り子シミュレーション (ii)

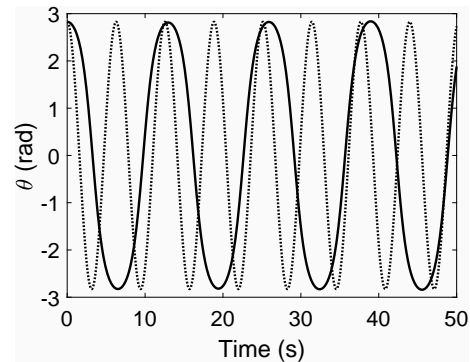


図 4.10 : 振り子シミュレーション (iii)

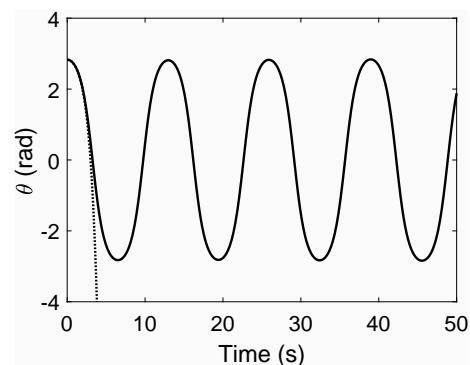


図 4.11 : 振り子シミュレーション (iv)

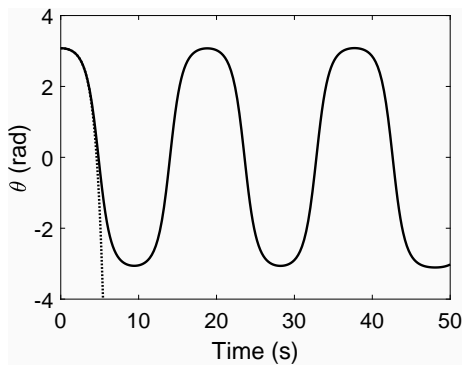


図 4.12 : 振り子シミュレーション (v)

- (1)  $\theta = \theta_0$  において, 振り子が釣り合うために必要なトルク  $T_0$  を求めよ.
- (2)  $\theta = \theta_0 + y, T = T_0 + u$  として, この釣り合いの位置における線形近似モデルを求めよ.

図 4.8 に示すように初期状態が十分平衡点に近いときには, 両者ともほぼ同じ周期的な運動を表している. 初期状態が平衡点から離れるにつれて非線形状態方程式については周期運動の形が変わっていくために線形状態方程式の挙動とは食い違いが出てくる. 平衡点を  $x_{1e} = \pi$  とするモデルでは, 周期運動を表すことはできないが, 非線形状態方程式の運動をある時点まではよく再現できている. これらのことから線形モデルの適用できる範囲は, 限定的なものになることが予想できるが, ある局面では大変有用な道具となることには変わりはない. このことに関しては 2.2 節で, 平衡点の安定性との関係で議論したことを思い出してほしい.

## 参考文献

- [A] 有本卓, ロボットの力学と制御, 朝倉書店, 1990.
- [S] M.C.Smith, Synthesis of Mechanical Networks: The Inerter, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol.47, No.10, pp.1648–1662, 2002.

## 練習問題

- 【1】 図 4.13 の (倒立した) 振り子を考える. 質量  $M$  の質点以外には質量はなく, 長さ  $L$  の棒は伸縮しないものとする. 棒の支点には, トルク  $T$  を発生させる装置がある. 角度  $\theta$  は振り子の回転角 (頂点を 0 とする) である. 以下の問いに答えよ.

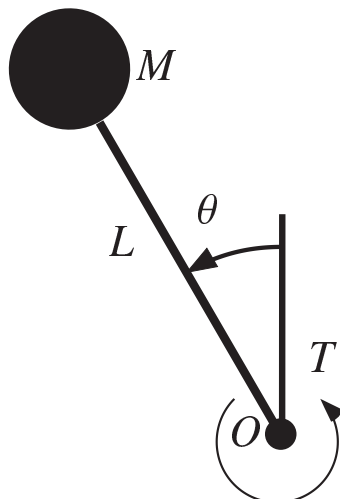


図 4.13 : 倒立振り子