5　一次系と二次系

一次系と二次系は，線形システムの中でも解析も容易であるし，その振る舞いは詳しく調べられている．一次系や二次系の扱いを理解していれば，高次システムを用いる必要がある場合の対処も可能となる．いわば，線形システムの中でも基本的なクラスになる．

5.1　一次系とその応答

一次系は，1階線形微分方程式で記述される線形システムのことである．外部入力のない1階線形微分方程式（斉次方程式）

$$\frac{dy}{dt} + ay = 0 \tag{5.1}$$

で記述される場合と，入力をもつ1階線形微分方程式（非斉次方程式）

$$\frac{dy}{dt} + ay = u \tag{5.2}$$

で記述される場合を考える．ただし a は定数であり，u は入力関数である．

すでに3節では，RC回路やRL回路を，4節では，ばねとダンパーの直接結合をそれぞれ見て来たように，電気回路においても機械要素においても，その動的な振る舞いの基本としてあらわれる．

5.1.1　斉次方程式の応答

式 (5.1) の解は，すでに3.3.1節で導いたので繰り返さないが

$$y(t) = y(0)\exp(-at) \tag{5.3}$$

となる．

解に関しては以下の点に注意する．

- 解の集合は線形空間になる．つまり解の和および解のスカラー倍はともに解になる．
- 解は指数関数である．
- $a > 0$ であれば，解は $t \to \infty$ のときに 0 に収束する．
- $a < 0$ であれば，解は $t \to \infty$ のときに発散する．

5.1.2　非斉次方程式の応答

定数入力をもつ1階線形微分方程式

$$\frac{dy}{dt} + ay = c \tag{5.4}$$

を考える．これは，式 (5.2) において u が定数関数となっている場合である．

$a \neq 0$ であれば，平衡点 $ay_e = c$ は任意の c に対して存在する．平衡点からの変化量を $z = y - y_e$ とおいて z に関する方程式を書くと

$$\frac{dz}{dt} + az = 0$$

となるので，解は

$$\begin{aligned} z(t) &= z(0)\exp(-at), \\ y(t) &= y(0)\exp(-at) \\ &\qquad + y_e\left(1 - \exp(-at)\right). \end{aligned} \tag{5.5}$$

である．これは初期値応答と入力による応答の和になっている．定数 a の符号によって

- $a > 0$ であれば，解は $t \to \infty$ のときに平衡点に収束する（近づく）．
- $a < 0$ であれば，解は恒等的に $y \equiv y_e$ でない限り $t \to \infty$ のときに発散する（平衡点には近づかない）．

という性質をもつ．

次に式 (5.2) の解を求めるために変数を

$$y(t) = z(t)\exp(-at)$$

と変換し，

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dt}\exp(-at) - az\exp(-at)$$

を利用して新しい変数 z に関する方程式を求めると

$$\frac{dz}{dt} = u(t)\exp(at)$$

を得る．これを積分してもとの変数 y に戻すことによって

$$\begin{aligned} z(t) &= z(0) + \int_0^t \exp(a\tau)u(\tau)d\tau \\ y(t) &= y(0)\exp(-at) \\ &\qquad + \int_0^t \exp(-a(t-\tau))u(\tau)d\tau. \end{aligned} \tag{5.6}$$

を得る．式 (5.6) を見ると，解は初期値応答と入力による応答の和になっていることがわかる．つまり重ね合わせの原理が成り立っている．また第2項（入力による応答）はたたみ込み積分である．

特に u が指数関数 $u(t) = k\exp(-bt)$ で与えられる場合を考える．ただし k は定数である．まず $a \neq b$ とすれば

$$\begin{aligned} &\exp(-at)\int_0^t \exp\{(a-b)\tau\}d\tau \\ &= \frac{\exp(-at)}{a-b}\left[\exp\{(a-b)t\} - 1\right] \\ &= \frac{\exp(-bt) - \exp(-at)}{a-b} \end{aligned} \tag{5.7}$$

に注意して

$$y(t) = y(0)\exp(-at) + k\frac{\exp(-bt) - \exp(-at)}{a-b} \tag{5.8}$$

である．一方 $a = b$ とすれば

$$\exp(-at)\int_0^t d\tau = t\exp(-at) \tag{5.9}$$

に注意して

$$y(t) = y(0)\exp(-at) + kt\exp(-at) \tag{5.10}$$

である．以上の結果はパラメータ a, b, k などが複素数であっても成り立つ．

式 (5.2) で表されるようなシステムを一次系ともいう．

5.2　一次系の例

1 階線形微分方程式で記述されるシステムの例としてすでに 2.1 節では水タンクの例（式 (2.7) 参照），3.3.1 節では RC 回路，3.3.2 節では RL 回路，4.1 節では，ばねとダンパーの直結系，4.3 節では，トーションダンパーをもつ回転機械系の例をとりあげた．以下ではそれ以外の例として放射性元素，温度変化，薬動力学をとりあげる．

5.2.1　放射性元素の崩壊モデル

放射性元素の崩壊には，半減期ということばが出てくるが，半減期で特徴付けられる時間関数は指数関数である．このことは元素の原子数 N に関して

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N \tag{5.11}$$

となる．実際，原子数が大きいときには，放射性元素の単位時間当たりの崩壊数は，原子数に比例すると言われている．$T_{1/2}$ を半減期とすれば，定数 λ との間には

$$\exp\left(-\lambda T_{1/2}\right) = 1/2$$

という関係があるので，

$$T_{1/2} = \frac{\log 2}{\lambda}$$

である．ここで対数の底は e である．

5.2.2　ニュートンの冷却則

ニュートンの冷却則（Newton’s law of cooling）は，物体温度が環境中に置かれたときにどのように変化するかを表すための簡単なモデルである．それは

$$\frac{dT}{dt} = -r\left(T - T_e\right) \tag{5.12}$$

と記述される．ここで T は物体温度，T_e は環境温度である．

5.2.3　1 コンパートメントモデル

薬動力学（pharmacokinetics）は，生体に投与された薬が吸収，分布，代謝，排泄などを通してどのような動態を示すかを解明する分野である．コンパートメントモデルは，薬動力学で用いられる生体の動的モデルであり，人体内をいくつかのコンパートメントに区切ってモデル化する．

静脈内ボーラス投与（静脈注射によって一気に投与する方法）に関する 1 コンパートメントモデルを考える．薬は血液に瞬時に分布するものと考え，生体をひとつのコンパートメントとして取り扱う．薬の血中濃度 C は排泄により減少するが，その減少率は血中濃度に比例するとすれば

$$\frac{dC}{dt} = -kC. \tag{5.13}$$

を得る．ここで比例定数 k は，消失速度定数（elimination rate constant）とよばれている．式 (5.13) は 1 階の斉次線形微分方程式である．

コンパートメントモデルについては文献 [J] などを参照されたい．

5.3　二次系

二次系は，2 階線形微分方程式で記述される線形システムのことである．本節では，その解と特徴について調べる．対象とするのは斉次方程式

$$\frac{d^2y}{dt^2} + a_1\frac{dy}{dt} + a_2 y = 0 \tag{5.14}$$

と，外部入力のある非斉次方程式

$$\frac{d^2y}{dt^2} + a_1\frac{dy}{dt} + a_2 y = u \tag{5.15}$$

である．これらの階を 1 階線形微分方程式の結果を用いて導いてみる．

5.3.1　2 階線形微分方程式（斉次方程式）

式 (5.14) の 2 階斉次微分方程式を考える．ここで多項式を因数分解して

$$p^2 + a_1 p + a_2 = (p + \alpha)(p + \beta) \tag{5.16}$$

とする．$-\alpha$, $-\beta$ が根となる．このとき線形微分方程式は等価的に

$$\left\{\frac{d}{dt} + \alpha\right\}\left\{\frac{d}{dt} + \beta\right\} y = 0 \tag{5.17}$$

と書ける．すると新たな変数を

$$w = \left\{\frac{d}{dt} + \beta\right\} y \tag{5.18}$$

と定めると，w は

$$\left\{\frac{d}{dt} + \alpha\right\} w = 0 \tag{5.19}$$

と1階の斉次微分方程式を満たす．その解は，5.1.1 節において記したように

$$w(t) = w(0)\exp(-\alpha t)$$

であるので，変数 y は1階の非斉次微分方程式

$$\left\{\frac{d}{dt} + \beta\right\} y = w(0)\exp(-\alpha t) \tag{5.20}$$

を満たす．

ここで多項式 (5.16) の根が相異なる実数（$a_1^2 > 4a_2$），重複する実数（$a_1^2 = 4a_2$），共役な複素数（$a_1^2 < 4a_2$）である場合に分けて考察する．

相異なる実数の場合　このときは式 (5.8) を適用して

$$y(t) = y(0)\exp(-\beta t) + w(0)\frac{\exp(-\alpha t) - \exp(-\beta t)}{\beta - \alpha}$$

であるが，

$$w(0) = \frac{dy}{dt}(0) + \beta y(0) \tag{5.21}$$

を代入すれば，式 (5.14) の解 y は

$$\begin{aligned} y(t) &= y(0)\frac{\beta\exp(-\alpha t) - \alpha\exp(-\beta t)}{\beta - \alpha} \\ &\quad + \frac{dy}{dt}(0)\frac{\exp(-\alpha t) - \exp(-\beta t)}{\beta - \alpha}. \end{aligned} \tag{5.22}$$

で与えられることがわかる．式 (5.22) より $y(t)$ は $t \to \infty$ のときに $\alpha < 0$ または $\beta < 0$ であれば発散し，$\alpha > 0$ かつ $\beta > 0$ であれば 0 に収束することがわかる．

重複する実数の場合　このときは式 (5.10) を適用して

$$y(t) = y(0)\exp(-\alpha t) + w(0)t\exp(-\alpha t)$$

であるが，初期状態の関係 (5.21) を代入すれば式 (5.14) の解 y は

$$\begin{aligned} y(t) &= y(0)\{\exp(-\alpha t) + \alpha t\exp(-\alpha t)\} \\ &\quad + \frac{dy}{dt}(0)t\exp(-\alpha t) \end{aligned} \tag{5.23}$$

となる．式 (5.23) より，$y(t)$ は $t \to \infty$ のときに $\alpha < 0$ であれば発散し，$\alpha > 0$ であれば 0 に収束することがわかる．

共役な複素数の場合　それら共役な複素数を

$$\alpha = \sigma + j\omega, \quad \beta = \sigma - j\omega$$

とおく．ただし j は（電気工学で用いられる習慣に従い）虚数単位（$j^2 = -1$）である．係数との関係は

$$\sigma = \frac{a_1}{2}, \quad \omega = \frac{\sqrt{4a_2 - a_1^2}}{2}$$

である．複素数の指数関数は

$$\begin{aligned} \exp(-\alpha t) &= \exp(-\sigma t)\exp(-j\omega t) \\ &= \exp(-\sigma t)\{\cos\omega t - j\sin\omega t\} \end{aligned}$$

となることに注意すれば，式 (5.14) の解 y は，

$$\begin{aligned} y(t) &= y(0)\exp(-\sigma t)\left\{\cos\omega t + \frac{\sigma}{\omega}\sin\omega t\right\} \\ &\quad + \frac{dy}{dt}(0)\frac{\exp(-\sigma t)}{\omega}\sin\omega t \end{aligned} \tag{5.24}$$

で与えられる．式 (5.24) より $y(t)$ は $t \to \infty$ のときに，$\sigma > 0$ であれば振動しながら減衰し，$\sigma < 0$ であれば振動しながら発散する．$\sigma = 0$ のｔきには，振動が継続することがわかる．

5.3.2　2 階線形微分方程式（非斉次方程式）

式 (5.15) の 2 階非斉次微分方程式を考える．多項式の因数分解を式 (5.16) で定めて，

$$\left\{\frac{d}{dt} + \alpha\right\}\left\{\frac{d}{dt} + \beta\right\} y = u \tag{5.25}$$

を考えることにする．変数 w を式 (5.18) で定めると，w は

$$\left\{\frac{d}{dt} + \alpha\right\} w = u \tag{5.26}$$

と1階の非斉次微分方程式を満たす．すると w は5.1.2 節で記したように

$$\begin{aligned} w(t) &= w(0)\exp(-\alpha t) \\ &\quad + \int_0^t \exp\{-\alpha(t-\tau)\}u(\tau)d\tau. \end{aligned} \tag{5.27}$$

で与えられるので，

$$\begin{aligned} &\left\{\frac{d}{dt} + \beta\right\} y = w, \\ &y(t) = y(0)\exp(-\beta t) \\ &\quad + \int_0^t \exp\{-\beta(t-\tau)\}w(\tau)d\tau. \end{aligned} \tag{5.28}$$

が成り立つ．

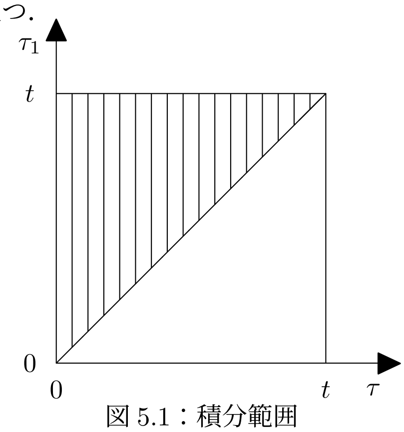

図 5.1：積分範囲

ここで式 (5.28) に式 (5.27) を代入するときに現れる積分を計算すると

$$\begin{aligned} &\int_0^t e^{-\beta(t-\tau_1)}\int_0^{t_1} e^{-\alpha(\tau_1-\tau)}u(\tau)d\tau d\tau_1 \\ &= \int_0^t \int_\tau^t e^{(\beta-\alpha)\tau_1}d\tau_1 e^{-\beta t}e^{\alpha\tau}u(\tau)d\tau \\ &= \int_0^t \frac{e^{(\beta-\alpha)t} - e^{(\beta-\alpha)\tau}}{\beta-\alpha}e^{-\beta t}e^{\alpha\tau}u(\tau)d\tau \\ &= \int_0^t \frac{e^{-\alpha(t-\tau)} - e^{-\beta(t-\tau)}}{\beta-\alpha}u(\tau)d\tau \end{aligned}$$

である．ただし積分範囲は図 5.1 において縦縞線をつけてある領域であり，上記の計算では途中で積分順序の交換を行っている．したがって式 (5.28) は

$$\begin{aligned} y(t) = y(0)\frac{\beta\exp(-\alpha t)-\alpha\exp(-\beta t)}{\beta-\alpha} \\ +\frac{dy}{dt}(0)\frac{\exp(-\alpha t)-\exp(-\beta t)}{\beta-\alpha} \\ +\int_0^t \frac{e^{-\alpha(t-\tau)}-e^{-\beta(t-\tau)}}{\beta-\alpha}u(\tau)d\tau. \end{aligned} \tag{5.29}$$

となる．ここで第 1 項と第 2 項は，初期値応答にあたり，第 3 項は入力による応答である．第 3 項は，入力とのたたみ込み積分となっている．

5.4 二次系の例

5.4.1 水タンクモデル

二つのタンクがつながったモデルを考える．水タンクについては 2.1 節においても述べたが，ここではタンクが図 5.2 のように二つつながっているものとする．図中の記号を表 5.1 に説明する．

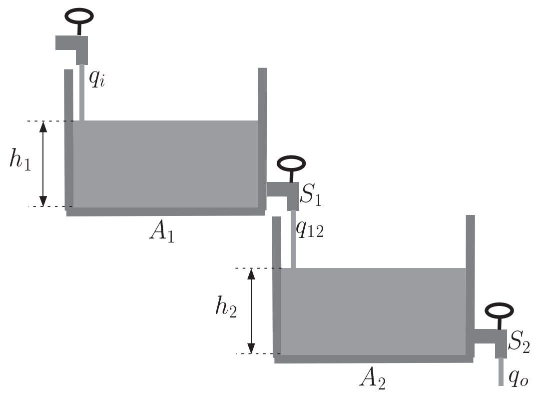

図 5.2：二つの水タンク

表 5.1：二つの水タンクの記号

タンク 1 断面積	$A_1(\mathrm{m}^2)$
タンク 2 断面積	$A_2(\mathrm{m}^2)$
タンク 1 流出口面積	$S_1(\mathrm{m}^2)$
タンク 2 流出口面積	$S_2(\mathrm{m}^2)$
タンク 1 水位	$h_1(\mathrm{m})$
タンク 2 水位	$h_2(\mathrm{m})$
流入量	$q_i(\mathrm{m}^3/\mathrm{s})$
タンク 1 より 2 へ流量	$q_{12}(\mathrm{m}^3/\mathrm{s})$
流出量	$q_o(\mathrm{m}^3/\mathrm{s})$

物理法則を記述すると

$$A_1\frac{dh_1}{dt} = q_i - q_{12}, \tag{5.30}$$

$$A_2\frac{dh_2}{dt} = q_{12} - q_o, \tag{5.31}$$

$$q_{12} = S_1\sqrt{2gh_1}, \tag{5.32}$$

$$q_o = S_2\sqrt{2gh_2} \tag{5.33}$$

となる．ここで式 (5.30) はタンク 1 の水量の変化とタンク 1 流入出量の関係，式 (5.31) はタンク 2 の水量の変化とタンク 1 流入出量の関係，式 (5.32) はタンク 1 についてのトリチェリの定理，式 (5.33) はタンク 2 についてのトリチェリの定理である．

式 (5.30)–(5.33) から変数を消去して非線形状態方程式

$$\frac{dh_1}{dt} = -\frac{S_1}{A_1}\sqrt{2gh_1} + \frac{q_i}{A_1}, \tag{5.34}$$

$$\frac{dh_2}{dt} = \frac{S_1}{A_2}\sqrt{2gh_1} - \frac{S_2}{A_2}\sqrt{2gh_2} \tag{5.35}$$

を得る．

平衡水位は，式 (5.34),(5.35) において右辺を 0 におくことにより

$$h_{1e} = \frac{q_i^2}{2gS_1^2}, \tag{5.36}$$

$$h_{2e} = \frac{S_1^2}{S_2^2}h_{1e} = \frac{q_i^2}{2gS_2^2} \tag{5.37}$$

である．平衡水位からの変量を $h_i = h_{ie} + x_i$, $i = 1, 2$ として

$$\sqrt{2gh_1} = \sqrt{2gh_{1e}} + \sqrt{\frac{g}{2h_{1e}}}x_1 + O(x_1^2) \tag{5.38}$$

でるから，2 次以上の項を無視することにより線形化された状態方程式

$$\frac{dx_1}{dt} = -\frac{S_1^2 g}{A_1 q_i}x_1 + \frac{1}{A_1}u, \tag{5.39}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{S_1^2 g}{A_2 q_i}x_1 - \frac{S_2^2 g}{A_2 q_i}x_2. \tag{5.40}$$

を得る．

式 (5.40) より

$$x_1 = \frac{A_2 q_i}{S_1^2 g}\frac{dx_2}{dt} + \frac{S_2^2}{S_1^2}x_2.$$

を式 (5.39) に代入して x_2 に関する 2 階線形微分方程式を得る．

$$\frac{A_2 q_i}{S_1^2 g}\frac{d^2x_2}{dt^2} + \left\{\frac{S_2^2}{S_1^2} + \frac{A_2}{A_1}\right\}\frac{dx_2}{dt} + \frac{S_2^2 g}{A_1 q_i}x_2 = \frac{1}{A_1}u. \tag{5.41}$$

このとき対応する多項式は

$$\begin{aligned} p^2 + \frac{\left(S_1^2A_2 + S_2^2A_1\right)g}{A_1A_2q_i}p + \frac{S_1^2S_2^2g^2}{A_1A_2q_i^2} \\ = \left\{p + \frac{S_1^2 g}{A_1 q_i}\right\}\left\{p + \frac{S_2^2 g}{A_2 q_i}\right\} \end{aligned} \tag{5.42}$$

と因数分解できるので，その根は

$$-\frac{S_1^2 g}{A_1 q_i} =: -\alpha, \quad -\frac{S_2^2 g}{A_2 q_i} =: -\beta \tag{5.43}$$

となる．以下簡単のために $\alpha \neq \beta$ の場合のみ考察する．

まず流入量変化がなく（$u \equiv 0$），斉次方程式で記述される場合の初期値応答を考える．つまり平衡水位から何らかの理由で変動した場合の挙動である．このときは式 (5.22) より

$$x_2(t) = x_2(0)\exp(-\beta t) + \frac{x_1(0)S_1^2A_1}{S_2^2A_1 - S_1^2A_2}\exp(-\alpha t) \tag{5.44}$$

を得る．

次に流入量変化のある場合を考える．このときには式 (5.29) より

$$x_2(t) = x_2(0)\exp(-\beta t) + \frac{x_1(0)S_1^2 A_1}{S_2^2 A_1 - S_1^2 A_2}\exp(-\alpha t) + \int_0^t \frac{A_1 A_2 q_i\left(e^{-\alpha(t-\tau)} - e^{-\beta(t-\tau)}\right)}{(S_2^2 A_1 - S_1^2 A_2)g} u(\tau)d\tau \tag{5.45}$$

となっている．

5.4.2 RLC 回路

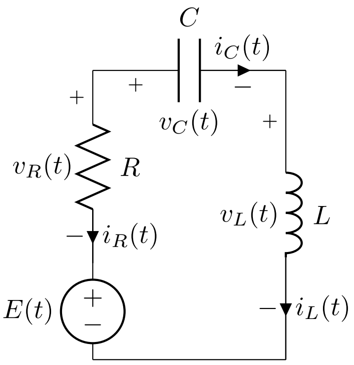

図 5.3：RLC 回路

図 5.4.2 で与えられる RLC 回路を考える．ここで v_L はインダクタ電圧，i_L はインダクタ電流，v_C はキャパシタ電圧，i_C はキャパシタ電流，v_R は抵抗電圧，i_R は抵抗電流である．回路の振る舞いを記述すると素子特性ならびにキルヒホッフ電圧則，電流則によって

$$v_R(t) = Ri_R(t), \tag{5.46}$$
$$i_C(t) = C\frac{dv_C}{dt}(t), \tag{5.47}$$
$$v_L(t) = L\frac{di_L}{dt}(t), \tag{5.48}$$
$$i_R(t) = -i_C(t) = -i_L(t), \tag{5.49}$$
$$v_R(t) = v_C(t) + v_L(t) - E \tag{5.50}$$

が成り立つ．式 (5.47) の両辺を t で微分したのちに変数 v_L, v_R, i_L, i_C, i_R を消去すると

$$LC\frac{d^2 v_C}{dt^2} + RC\frac{dv_C}{dt} + v_C = E \tag{5.51}$$

を得る．

このとき対応する多項式は

$$LCp^2 + RCp + 1 \tag{5.52}$$

であり，その根は $R^2 - 4L/C$ の符号が負, 0, 正によってそれぞれ複素数，実数（重複した根），二つの実数になる．

複素数根の場合（$R^2 - 4L/C < 0$）　このとき

$$-\sigma + j\omega = -\frac{R}{2L} + j\frac{1}{2L}\sqrt{\frac{4L}{C} - R^2} \tag{5.53}$$

とおいて，多項式 (5.52) の根は $-\sigma \pm j\omega$ である．初期値応答は 5.3.1 節の式 (5.24) で与えることができる．$R > 0$ であればキャパシタ電圧は振動しながら減衰していく．$R = 0$ の場合は，角周波数

$$\omega_o = \sqrt{\frac{1}{LC}} \tag{5.54}$$

の三角関数として振動する．電源電位を $E(t)$ とするときには，5.3.2 節で与えた考察にともなって応答を求めることができる．

重複した実根の場合（$R^2 - 4L/C = 0$）　このとき多項式 (5.52) の根は

$$-\alpha = -\frac{R}{2L}$$

であり、これは重複した根である．したがって初期値応答は 5.3.1 節の式 (5.23) で与えることができる．電源電位を $E(t)$ とするときには，5.3.2 節で与えた考察にともなって応答を求めることができる．

相異なる実根の場合（$R^2 - 4L/C > 0$）　このとき多項式 (5.52) の根は

$$-\alpha = -\frac{R}{2L} + \frac{1}{2L}\sqrt{R^2 - \frac{4L}{C}},$$
$$-\beta = -\frac{R}{2L} - \frac{1}{2L}\sqrt{R^2 - \frac{4L}{C}}$$

で与えられる．したがって初期値応答は 5.3.1 節の式 (5.22) で与えることができる．電源電位を $E(t)$ とするときには，5.3.2 節で与えたたたみ込み積分を含んだ式 (5.29) を用いて応答を求めることができる．

5.4.3 質点ばねダンパー系

図 5.4 のように質点がばねとダンパーに結合したシステムを考える．図 5.4 中の記号についてはその意味を表 5.2 に示す．

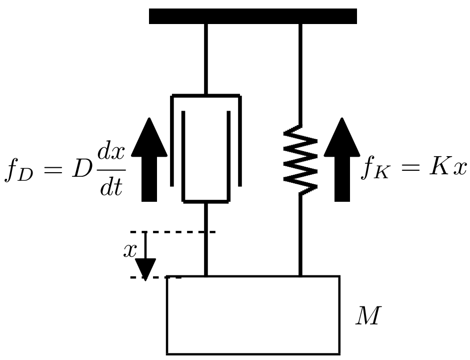

図 5.4：質点ばねダンパー系

表 5.2：質点ばねダンパー系の記号

質点質量	M(kg)
ばね定数	K(N/m)
減衰係数	D(Ns/m)
質点の変位	x(m)

ばねにより発生する力 f_K とダンパーにより発生する力 f_D とは

$$f_K = -Kx, \quad f_D = -D\frac{dx}{dt}$$

で与えられるので，運動方程式は

$$M\frac{d^2x}{dt^2} + D\frac{dx}{dt} + Kx = 0 \tag{5.55}$$

によって与えられる．

このとき対応する多項式は

$$Mp^2 + Dp + K$$

である．これは $D^2-4MK > 0$ ならば相異なる実数根，$D^2-4MK = 0$ ならば重複する実数根，$D^2-4MK < 0$ ならば共役な複素数根をもつことがわかる．したがって以下は 5.3.1 節に述べた方法で系の振る舞いを知ることができる．

5.4.4　回転系

図 5.5 で記述されるようにやわらかい軸の一端を壁に固定された回転体を考える．ただし回転体の回転軸まわりの慣性モーメントを J, 回転角度を θ, 粘性による力は角速度に比例するとして $D(d\theta/dt)$, ねじれによる力は角度に比例するとして $K\theta$, 回転体には外部から T のトルクが加わるものとする．

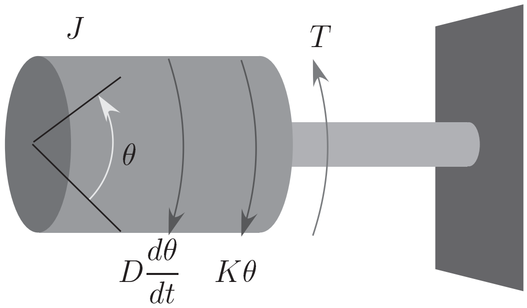

図 5.5：回転系

このとき運動方程式は，

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2} + D\frac{d\theta}{dt} + K\theta = T \tag{5.56}$$

で与えられる．外部入力のある点が異なるが，質点ばねダンパー系の式 (5.55) とほぼ同一である．また電源のある RLC 回路の式 (5.51) と形式的には同一である．したがってこの系の振る舞いは，5.4.2 節での RLC 回路と同様である．

5.4.5　2 コンパートメントモデル

5.2 節では，薬動力学で用いられる 1 コンパートメントモデルについて説明した．それは静脈内ボーラス投与（静脈注射によって一気に投与する方法）に関するモデルであるが，そのような投与においても応答は二つの指数関数の和として表されると考えるほうが妥当な状況も多い．そのようなとき生体を血液を含む中枢コンパートメントと筋，皮膚，脂肪組織などの末梢コンパートメントの二つのコンパートメントからなり 2 コンパートメントモデルが利用される [HFA].

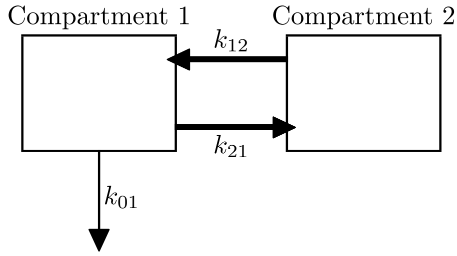

図 5.6：2 コンパートメントモデル

図 5.6 に 2 コンパートメントモデルを示す．中枢コンパートメントをコンパートメント 1，末梢コンパートメントをコンパートメント 2 として，それぞれのコンパートメントの薬の総量を x_1, x_2 とする．薬の移動量は移動する側のコンパートメント内にある薬の総量に比例すると考え，コンパートメント 1 から 2 への移動に関する比例定数を k_{21}，コンパートメント 2 から 1 への移動に関する比例定数を k_{12} とする．またコンパートメント 1 から薬は代謝によって消失するが，その消失の速さもコンパートメント 1 の薬総量に比例するものとしてその比例定数を k_{01} で表す．するとモデルは

$$\frac{dx_1}{dt} = -\left(k_{01} + k_{21}\right)x_1 + k_{12}x_2, \tag{5.57}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = k_{21}x_1 - k_{12}x_2 \tag{5.58}$$

となる．

式 (5.57),(5.58) を辺々加えて

$$\frac{dx_1}{dt} + \frac{dx_2}{dt} = -k_{01}x_1$$

を得るが，これから

$$\frac{dx_2}{dt} = -\frac{dx_1}{dt} - k_{01}x_1$$

を式 (5.57) の両辺を微分した式に代入して

$$\begin{aligned}\frac{d^2x_1}{dt^2} &= -\left(k_{01} + k_{21}\right)\frac{dx_1}{dt} + k_{12}\frac{dx_2}{dt}\\ &= -\left(k_{01} + k_{21}\right)\frac{dx_1}{dt}\\ &\quad + k_{12}\left(-\frac{dx_1}{dt} - k_{01}x_1\right)\end{aligned}$$

を得るので，x_1 は 2 階の線形微分方程式

$$\begin{aligned}&\frac{d^2x_1}{dt^2} + \left(k_{01} + k_{21} + k_{12}\right)\frac{dx_1}{dt}\\ &\qquad + k_{12}k_{01}x_1 = 0\end{aligned} \tag{5.59}$$

を満たしている．

式 (5.59) に対応した多項式は

$$f(p) = p^2 + \left(k_{01} + k_{21} + k_{12}\right)p + k_{12}k_{01} \tag{5.60}$$

であるが，パラメータ k_{01}, k_{21}, k_{12} がすべて正であるとすれば，多項式 (5.60) の根は負の相異なる実数になることを次のようにして示すことができる．まず $f(0) = k_{12}k_{01} > 0$ である．また

$$f(p) = \left(p + k_{12}\right)\left(p + k_{01}\right) + k_{21}p$$

を用いると $f(-k_{01}) = -k_{01}k_{21} < 0$ である．さらに十分小さな $p_1 < 0$ について $f(p_1) > 0$ であるので，$f(p) = 0$ は相異なる負の実数根をもつ．

したがって 2 コンパートメントモデル (5.59) の初期値応答は $t \to \infty$ で減衰する二つの指数関数の和として表すことができる．

参考文献

[J] J.A. Jacquez, Compartmental Analysis in Biology and Medicine, 2nd edition, Ann Arbor, University of Michigan Press, 1985.

[HFA] 花野学, 藤田浩, 粟野荘司, 薬の体内動態 — ファーマコキネティクスの実際, 講談社, 1981.

練習問題

【1】 次の線形微分方程式の解を求めよ．

(i) $$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - 2y = 0.$$

(ii) $$\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} + 2y = 0.$$

(iii) $$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 2y = \exp(-t).$$