数理工学専攻　太田快人

# 6　状態空間表現

本章では，動的システムの状態空間表現について述べる．5章では，1階または2階の線形微分方程式を用いてモデル化できる動的なシステムを考えてきた．またその動的な振る舞い（微分方程式の解）の計算方法についても言及した．ここでは別のモデル化である状態方程式とその解について調べることにする．

## 6.1　二次状態空間表現の解

状態変数 $x_1, x_2$ に関しての連立1階線形微分方程式

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u \tag{6.1}$$

を（2次の）状態方程式表現という．ここで $u$ は外部入力であり，$u \equiv 0$ であるシステムを自律系という．

手短に記述するために

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},\ A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

とすれば，式 (6.1) は

$$\frac{dx}{dt} = Ax + bu \tag{6.2}$$

と書ける．以下，この方程式の解を求め，そのときに現れる行列指数関数について調べることにする．

式 (6.2) の解を求めてみる．行列 $A$ の固有値と固有ベクトルを

$$Ag_1 = \lambda_1 g_1, \tag{6.3}$$
$$Ag_2 = \lambda_2 g_2 \tag{6.4}$$

とおく．ただし $g_1, g_2$ は一次独立であると仮定する．たとえば，行列 $A$ が相異なる固有値（$\lambda_1 \neq \lambda_2$）を持てば，この仮定は成り立つ．

固有ベクトルを用いて $x(t)$ および $b$ を

$$x(t) = \xi_1(t)g_1 + \xi_2(t)g_2, \tag{6.5}$$
$$b = \beta_1 g_1 + \beta_2 g_2 \tag{6.6}$$

と表すことにする．このとき

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}(t) &= \frac{d}{dt}\left\{\xi_1(t)g_1 + \xi_2(t)g_2\right\} \\ &= \frac{d\xi_1}{dt}(t)g_1 + \frac{d\xi_2}{dt}(t)g_2\end{aligned} \tag{6.7}$$

および

$$\begin{aligned}&Ax(t) + bu(t) \\ &= A\left\{\xi_1(t)g_1 + \xi_2(t)g_2\right\} + (\beta_1 g_1 + \beta_2 g_2)\, u(t) \\ &= (\lambda_1\xi_1(t) + \beta_1 u(t))\, g_1 + (\lambda_2\xi_2(t) + \beta_2 u(t))\, g_2\end{aligned} \tag{6.8}$$

であるので，式 (6.7),(6.8) を見比べて，$g_1, g_2$ が一次独立であることを用いると

$$\frac{d\xi_1}{dt}(t) = \lambda_1\xi_1(t) + \beta_1 u(t), \tag{6.9}$$
$$\frac{d\xi_2}{dt}(t) = \lambda_2\xi_2(t) + \beta_2 u(t) \tag{6.10}$$

が成り立つ．

式 (6.9),(6.10) は，（連立していない）1階線形微分方程式 (5.2) と同じであり，その解は，式 (5.6) で与えた．つまり

$$\xi_1(t) = \xi_1(0)e^{\lambda_1 t} + \int_0^t e^{\lambda_1(t-\tau)}\beta_1 u(\tau)d\tau, \tag{6.11}$$
$$\xi_2(t) = \xi_2(0)e^{\lambda_2 t} + \int_0^t e^{\lambda_2(t-\tau)}\beta_2 u(\tau)d\tau. \tag{6.12}$$

である．

式 (6.11), (6.12) を変数 $x$ に戻すと

$$\begin{aligned}x(t) &= \xi_1(t)g_1 + \xi_2(t)g_2 \\ &= \xi_1(0)e^{\lambda_1 t}g_1 + \xi_2(0)e^{\lambda_2 t}g_2 \\ &\quad + \int_0^t e^{\lambda_1(t-\tau)}\beta_1 u(\tau)d\tau g_1 \\ &\quad + \int_0^t e^{\lambda_2(t-\tau)}\beta_2 u(\tau)d\tau g_2\end{aligned} \tag{6.13}$$

である．式 (6.13) を見ると，式 (6.2) の解は初期値応答と入力とのたたみ込み積分との和になっている．

## 6.2　行列指数関数

ここでは，線形状態方程式の解にとって重要となる行列指数関数という考え方を紹介する．より詳しくは，システム制御理論に向いた線形代数の参考書（たとえば [B, G, O] など）を参照されたい．

### 6.2.1　対角化との関係

式 (6.13) は，係数行列 $A$ を固有ベクトルを用いて対角化することに関連している．正則行列 $M$ を式 (6.3), (6.4) での固有ベクトル $g_1, g_2$ を並べて

$$M = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \end{bmatrix},\ 2 \times 2 \text{ 行列}. \tag{6.14}$$

と定める．

式 (6.5),(6.6) での係数を用いて定義したベクトル

$$\xi(t) = \begin{bmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \end{bmatrix},\quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$$

と定める．このとき

$$\xi(t) = M^{-1}x(t),\quad \beta = M^{-1}b \tag{6.15}$$

であることに注意する．

式 (6.15) を用いると

$$\begin{aligned} M^{-1}\frac{dx}{dt} &= \frac{dM^{-1}x}{dt} = \frac{d\xi}{dt} \\ M^{-1}\left(Ax+bu\right) &= \left(M^{-1}AM\right)\left(M^{-1}x\right) + \left(M^{-1}b\right)u \\ &= \left(M^{-1}AM\right)\xi + \beta u \end{aligned}$$

である．一方，

$$\begin{aligned} M^{-1}AM &= M^{-1}A\begin{bmatrix} g_1 & g_2 \end{bmatrix} \\ &= M^{-1}\begin{bmatrix} Ag_1 & Ag_2 \end{bmatrix} \\ &= M^{-1}\begin{bmatrix} \lambda_1 g_1 & \lambda_2 g_2 \end{bmatrix} \\ &= M^{-1}M\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} =: \Lambda \end{aligned}$$

であるから

$$\frac{d\xi}{dt} = \Lambda\xi + \beta u \tag{6.16}$$

が成り立つ．$\Lambda$ は対角行列であることに注意する．式 (6.16) を成分ごとに記述したのが式 (6.9),(6.10) である．

### 6.2.2 行列指数関数による解の表現

対角行列 $\Lambda$ の指数関数を

$$\exp\left(\Lambda t\right) = \begin{bmatrix} \exp\left(\lambda_1 t\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(\lambda_2 t\right) \end{bmatrix} \tag{6.17}$$

と定めれば，式 (6.16) の解である式 (6.11), (6.12) は，

$$\xi(t) = \exp\left(\Lambda t\right)\xi(0) + \int_0^t \exp\left(\Lambda(t-\tau)\right)\beta u(\tau)d\tau \tag{6.18}$$

となる．

変数を $\xi = M^{-1}x$ を用いて $\xi$ から $x$ に戻すと

$$\begin{aligned} x(t) &= M\xi(t) \qquad (6.19) \\ &= M\exp\left(\Lambda t\right)M^{-1}x(0) \\ &\quad + \int_0^t M\exp\left(\Lambda(t-\tau)\right)M^{-1}bu(\tau)d\tau \end{aligned}$$

である．ここで行列 $A$ の行列指数関数を

$$\exp\left(At\right) = M\exp\left(\Lambda t\right)M^{-1} \tag{6.20}$$

と定めると式 (6.19) は，

$$x(t) = \exp\left(At\right)x(0) + \int_0^t \exp\left(A(t-\tau)\right)bu(\tau)d\tau \tag{6.21}$$

となる．行列 $A$ の行列指数関数を $e^{At}$ と書くこともある．

式 (6.21) は，式 (5.6) にて導出したのと形式的には同じ形をしている．つまり指数関数で決められる初期値応答の部分と入力関数とのたたみ込み積分との和になっているからである．

### 6.2.3 行列指数関数の性質

式 (6.20) によって定めた行列指数関数 $\exp(At)$ の性質をまとめておく．まず $t=0$ でのテイラー展開を考えることによって

$$\exp(At) = (At)^0 + (At)^1 + \frac{(At)^2}{2} + \frac{(At)^3}{3!} + \cdots \tag{6.22}$$

が成り立つ．実際，式 (6.22) 右辺は

$$M\left(\Lambda t\right)^k M^{-1} = \left(At\right)^k$$

が成り立つことに注意すると

$$M\left\{(\Lambda t)^0 + (\Lambda t)^1 + \frac{(\Lambda t)^2}{2} + \frac{(\Lambda t)^3}{3!} + \cdots\right\}M^{-1}$$

に等しいが，この括弧の中は式 (6.17) 右辺の対角要素である（通常の）指数関数の $t=0$ での展開を考えると $\exp(\Lambda t)$ に等しいことがわかる．これから式 (6.22) が正しいことがわかる．

その他の性質を知るために

$$\Phi(t) := \exp\left(At\right) = (At)^0 + (At)^1 + \frac{(At)^2}{2!} + \cdots \tag{6.23}$$

とおく．このとき以下の性質が成り立つ．

$$\Phi(0) = I, \tag{6.24}$$

$$\frac{d\Phi}{dt}(t) = A\Phi(t), \tag{6.25}$$

$$\Phi(t+h) = \Phi(t)\Phi(h). \tag{6.26}$$

実際，式 (6.24) は，代入すれば明らかである．次に式 (6.25) は項別微分をすることによって

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left\{(At)^0 + (At)^1 + \frac{(At)^2}{2} + \frac{(At)^3}{3!} + \cdots\right\} \\ &\qquad = A\left(At\right)^0 + A\left(At\right)^1 + A\frac{(At)^2}{2} + \cdots \end{aligned}$$

を得ることができる．最後に式 (6.26) であるが，$t=0$ で左右両辺とも $\Phi(h)$ で一致すること，および左右両辺とも微分方程式

$$\frac{dX}{dt} = AX$$

を満たすことを用いる．この微分方程式の $t=0$ での初期値を決めた解は一意であることを利用すると式 (6.26) が示されたことになる．そこで左辺および右辺の微分を計算すると

$$\begin{aligned} \frac{\Phi(t+h)}{dt} &= A\Phi(t+h), \\ \frac{\Phi(t)\Phi(h)}{dt} &= \frac{\Phi(t)}{dt}\Phi(h) = A\Phi(t)\Phi(h) \end{aligned}$$

を満たしている．

式 (6.24), (6.26) より $\Phi(-t)\Phi(t) = I$ であることもわかる．したがって $\exp(At)$ は任意の $t$ について正則行列である．

## 6.3　状態方程式モデルの例とその性質

本節では，状態方程式モデルの例として，水タンクモデルと RLC 回路モデルをとりあげる．それらの例を通しての解析の結果として，初期値応答の挙動を係数行列の固有値と関係づけて説明することにする．

### 6.3.1　水タンクモデル

二つの水タンクが結合したシステムに関しては，5.4.1 節でも考察した．図 5.2 の水タンクの結合システムに対して表 5.1 の記号を用いるとき，タンク 1 とタンク 2 の水位は非線形状態方程式 (5.34),(5.35) によって記述される．再掲すると

$$\frac{dh_1}{dt} = -\frac{S_1}{A_1}\sqrt{2gh_1} + \frac{q_i}{A_1},$$
$$\frac{dh_2}{dt} = \frac{S_1}{A_2}\sqrt{2gh_1} - \frac{S_2}{A_2}\sqrt{2gh_2}$$

である．

平衡水位 $h_{1e}, h_{2e}$（これらはそれぞれ式 (5.36),(5.37) で与えられている）からの変量を $h_i = h_{ie}+x_i,\ i = 1, 2$ として高次の項を無視すれば線形状態方程式 (5.39),(5.40) を得る．再掲すれば

$$\frac{dx_1}{dt} = -\frac{S_1^2 g}{A_1 q_i}x_1 + \frac{1}{A_1}u,$$
$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{S_1^2 g}{A_2 q_i}x_1 - \frac{S_2^2 g}{A_2 q_i}x_2.$$

である．あるいはベクトルと行列を用いて書くと

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{S_1^2 g}{A_1 q_i} & 0 \\ \frac{S_1^2 g}{A_2 q_i} & -\frac{S_2^2 g}{A_2 q_i} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} \\ 0 \end{bmatrix}u \quad (6.27)$$

である．

係数行列の固有値は，下三角行列であるので対角要素である

$$-\frac{S_1^2 g}{A_1 q_i}, \quad -\frac{S_2^2 g}{A_2 q_i}$$

であり，対応する固有ベクトルは

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{S_1^2 A_1}{S_2^2 A_1 - S_1^2 A_2} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

である．これを用いて係数行列の指数関数を求めると

$$\exp\begin{bmatrix} -\frac{S_1^2 g}{A_1 q_i} & 0 \\ \frac{S_1^2 g}{A_2 q_i} & -\frac{S_2^2 g}{A_2 q_i} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{S_1^2 A_1}{S_2^2 A_1 - S_1^2 A_2} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \exp\left(-\frac{S_1^2 g}{A_1 q_i}t\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(-\frac{S_2^2 g}{A_2 q_i}t\right) \end{bmatrix}$$
$$\times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{S_1^2 A_1}{S_2^2 A_1 - S_1^2 A_2} & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \exp\left(-\frac{S_1^2 g}{A_1 q_i}t\right) & 0 \\ \frac{S_1^2 A_1}{S_2^2 A_1 - S_1^2 A_2}\left\{\exp\left(-\frac{S_1^2 g}{A_1 q_i}t\right) - \exp\left(-\frac{S_2^2 g}{A_2 q_i}t\right)\right\} & \exp\left(-\frac{S_2^2 g}{A_2 q_i}t\right) \end{bmatrix}$$

であることがわかる．

表 6.1：シミュレーションのパラメータ数値

| | |
|---|---|
| $S_1$ | 0.1 |
| $A_1$ | 10 |
| $S_2$ | 0.2 |
| $A_2$ | 1 |
| $q_i$ | 1 |
| $g$ | 9.8 |

たとえばパラメータ数値を表 6.1 のようにとるとき，固有値は $-0.3920$, $-0.0098$ である．数値計算によって行列指数関数を求めて，さまざまな初期値からの初期値応答（$u \equiv 0$）を求めると図 6.1 のようになる．解軌道は大きいほうの固有値（$-0.0098$）に対する固有ベクトルに沿って原点に漸近していることがわかる．

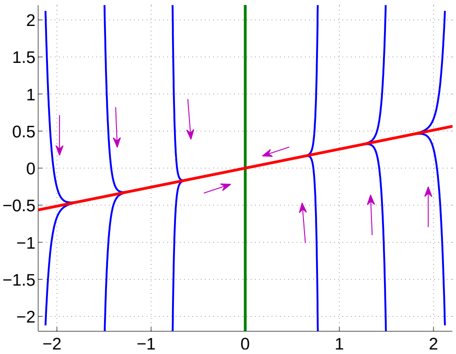

図 6.1：水タンクの初期値応答

### 6.3.2　RLC 回路

図 5.3 で示す RLC 回路に関しては，そのモデル化を 5.4.2 で考察した．物理法則の記述は式 (5.46)–(5.50) で与えられている．ここでキャパシタ電圧 $v_C$ とインダクタ電流 $i_L$ を状態変数にとると電源電圧を入力とする状態方程式

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}E$$

を得ることができる．

表 6.2：シミュレーションのパラメータ数値

| | |
|---|---|
| $R$ | 1 |
| $L$ | 0.1 |
| $C$ | 0.001 |

たとえばパラメータ数値を表 6.2 のようにとるとき，固有値は $-5.00 \pm 99.87j$ である．数値計算によって行列指数関数を求めて，さまざまな初期値からの初期値応答（$u \equiv 0$）を求めると図 6.2 のようになる．解軌道は回転しながら原点に漸近していることがわかる．

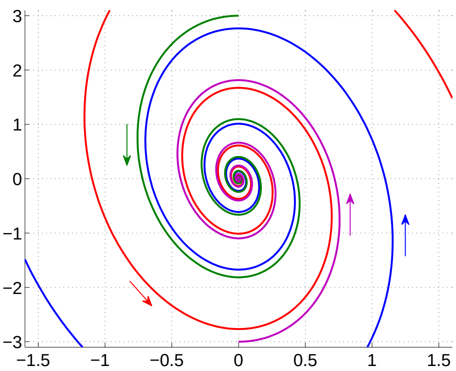

図 6.2：RLC 回路の初期値応答

### 6.3.3 初期値応答の特徴

水タンクモデルでは，係数行列は二つの実固有値（二つとも負）をもち，RLC 回路では，係数行列は共役な複素固有値（実部は負）をもっていた．ここでは，固有値と初期値応答の関係について述べておく．

入力を 0 とした状態方程式

$$\frac{d}{dt}x = Ax$$

を考える．ただし $A$ は $2 \times 2$ の実数行列とする．その固有値を $\lambda_1, \lambda_2$ とし，対応する固有ベクトルを $g_1$, $g_2$ とする．ただし行列 $A$ には一次独立な二本の固有ベクトルがある場合を考える．

6.1 節で調べたように，式 (6.9),(6.10) で $u \equiv 0$ とおいた応答を示す．つまり

$$\frac{d\xi_1}{dt}(t) = \lambda_1 \xi_1(t)$$
$$\frac{d\xi_2}{dt}(t) = \lambda_2 \xi_2(t)$$

である．すると

$$\xi_1(t) = e^{\lambda_1 t}\xi_1(0) \tag{6.28}$$
$$\xi_2(t) = e^{\lambda_2 t}\xi_2(0) \tag{6.29}$$

である．以下，固有値が実数の場合と，共役な複素数になる場合を区別して整理する．

固有値が実数の場合，式 (6.28),(6.28) のように応答は指数関数であり，固有値が正であればその応答は $t \to \infty$ のときに発散し，固有値が負であればその応答は $t \to \infty$ のときに 0 に収束する．固有値が 0 であれば，その応答は定数となる．したがって 2 固有値ともに正である場合は，初期値応答は $t \to \infty$ のときに発散する．逆に 2 固有値ともに負である場合は，初期値応答は $t \to \infty$ のときに 0 に収束する．正負（または正と 0）の固有値がある場合には，負の固有値（または 0 固有値）に対する固有ベクトルの定数倍に初期条件が一致している場合を除いて，初期値応答は $t \to \infty$ のときに発散する．負と 0 の固有値がある場合には，負の固有値に対する固有ベクトルの定数倍に初期条件が一致している場合を除いて，初期値応答は $t \to \infty$ のときにある値に収束する．6.3.1 節での水タンクモデルは，係数行列の固有値が二つともに負である場合に相当している．

固有値が共役な複素数（虚部は 0 でないものとする）の場合，式 (6.28),(6.28) のように応答は複素数の指数関数となるが，固有値の虚部と実部をそれぞれ

$$\lambda_1 = \sigma + j\omega, \quad \lambda_2 = \sigma - j\omega$$

として定めると

$$\frac{\xi_1(t) + \xi_2(t)}{2} = e^{\sigma t}\cos\omega t$$
$$\frac{\xi_1(t) - \xi_2(t)}{2j} = e^{\sigma t}\sin\omega t$$

である．これより固有値の実部が正であれば初期値応答は $t \to \infty$ のときに発散し，固有値の実部が負であれば初期値応答は $t \to \infty$ のときに 0 に収束する．また固有値の実部が 0 であれば，初期値応答は振動する．6.3.2 節での RLC 回路モデルは，係数行列の固有値実部が負である場合に相当している．

## 6.4 状態方程式の表現能力

前節までで 2 次系の状態方程式表現として，水タンクモデルと RLC 回路を例として取り上げた．ここでは，線形微分方程式と状態方程式表現の関係，3 次以上の状態方程式について触れておく．

### 6.4.1 線形微分方程式との関係

外部入力 $u$ をもった 2 階線形微分方程式

$$\frac{d^2y}{dt^2} + a_1\frac{dy}{dt} + a_2 y = b_1\frac{du}{dt} + b_2 u \tag{6.30}$$

を考える．この解 $y$ を状態方程式を用いて記述してみる．

関連する微分方程式

$$\frac{d^2z}{dt^2} + a_1\frac{dz}{dt} + a_2 z = u \tag{6.31}$$

を考える．式 (6.31) の解 $z$ を用いて

$$y = b_1\frac{dz}{dt} + b_2 z \tag{6.32}$$

と定める．式 (6.32) の $y$ は式 (6.30) の解であることが次のようにしてわかる．

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2y}{dt^2} + a_1\frac{dy}{dt} + a_2 y \\
&= \frac{d^2}{dt^2}\left(b_1\frac{dz}{dt} + b_2 z\right) + a_1\frac{d}{dt}\left(b_1\frac{dz}{dt} + b_2 z\right) \\
&\qquad + a_2\left(b_1\frac{dz}{dt} + b_2 z\right) \\
&= b_1\frac{d}{dt}\left(\frac{d^2z}{dt^2} + a_1\frac{dz}{dt} + a_2 z\right) \\
&\qquad + b_2\left(\frac{d^2z}{dt^2} + a_1\frac{dz}{dt} + a_2 z\right) \\
&= b_1\frac{du}{dt} + b_2 u.
\end{aligned}$$

式 (6.31) より，変数 $z$ は状態方程式

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\frac{dz}{dt} \\ z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-a_1 & -a_2 \\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{dz}{dt} \\ z\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1 \\ 0\end{bmatrix}u \tag{6.33}$$

を満たすので，

$$y = \begin{bmatrix}b_1 & b_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{dz}{dt} \\ z\end{bmatrix} \tag{6.34}$$

とすれば，この $y$ は式 (6.30) を満たす．つまり式 (6.33), (6.34) によって，2 階線形微分方程式 (6.30) の解 $y$ が特徴付けられたことになる．

### 6.4.2 3 次以上の状態方程式

これまで，状態方程式の状態変数は 2 次元を上回ることはなかったが，実際にはより高次な状態変数を用いてモデル化されるべきシステムは数多くある．たとえば二つの剛体を結合させたシステム（図 6.3 参照）

を考える．二つの剛体がばねとダンパーで結合されており，その間に力 $F$ を発生させる装置があるものとする．また一方の剛体は固定された床にばねとダンパーで結合されているものとする．

物理法則を記述すると

$$M_1 \frac{d^2 z_1}{dt^2} \tag{6.35}$$
$$= -K_1 z_1 - D_1 \frac{dz_1}{dt} + K_2 (z_2 - z_1) + D_2 \left( \frac{dz_2}{dt} - \frac{dz_1}{dt} \right) - F,$$

$$M_2 \frac{d^2 z_1}{dt^2} \tag{6.36}$$
$$= -K_2 (z_2 - z_1) - D_2 \left( \frac{dz_2}{dt} - \frac{dz_1}{dt} \right) + F$$

であるが，状態変数と行列を

$$x = \begin{bmatrix} z_1 \\ \frac{dz_1}{dt} \\ z_2 \\ \frac{dz_2}{dt} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{M_1} \\ 0 \\ \frac{1}{M_2} \end{bmatrix}, \tag{6.37}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{K_1+K_2}{M_1} & -\frac{D_1+D_2}{M_1} & \frac{K_2}{M_1} & \frac{D_2}{M_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{K_2}{M_2} & \frac{D_2}{M_2} & -\frac{K_2}{M_2} & -\frac{D_2}{M_2} \end{bmatrix} \tag{6.38}$$

と定めるならば，状態方程式

$$\frac{dx}{dt} = Ax + bF$$

は，二剛体システムの状態方程式である．

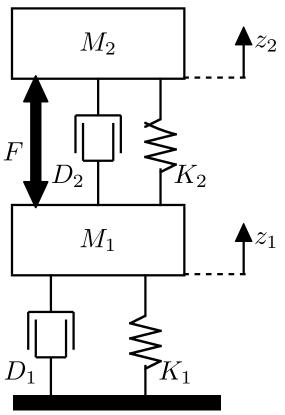


図 6.3：二つの剛体の結合系

## 練習問題

【1】 第４回配布資料の練習問題【1】について，さらに以下の問いに答えよ．

(1) $\theta = \theta_0$ における線形近似モデルの状態方程式を求めよ．

(2) $L = \sqrt{3}/5$, $M = 1$, $\theta_0 = \pi/6$, $g = 10$ とするとき，前問での線形化された状態方程式の係数行列 $A$ を求め，その行列指数関数を計算せよ．

【2】 行列

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -6 & 6 \end{bmatrix}$$

に対して，行列指数関数 $\exp(At)$ を求めよ．さらに，$x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ のとき，初期値問題

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad x(0) = x_0$$

の解を求めよ．

## 参考文献


[B] D.S.Bernstein, Matrix Mathematics, Princeton University Press, 2005.

[G] F.R.Gantmacher, The Theory of Matrices, vol.1 and 2, Chelsea Publishing Company, 1959.

[O] 太田, システム制御のための数学 (1)，コロナ社, 2000.