7　ラプラス変換

本章では，ラプラス変換について述べる．ラプラス変換は時間の関数を複素数の関数に写す．その結果，時間関数の世界での線形微分方程式が複素関数の世界では線形代数方程式となる．このことを利用すると，線形微分方程式を解くことができる．その他にもラプラス変換と動的システムはつながりが深いので，その性質を本章では明らかにしていく．

7.1　ラプラス変換の定義

時間区間 $0 \le t < \infty$ で定義された時間関数 f があるときに，そのラプラス変換を

$$\mathcal{L}\left[f\right](s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt \tag{7.1}$$

と定める．ただし複素数 s は式 (7.1) での積分が収束する領域にとる（関数 f ごとに異なる）．この領域はラプラス変換の理論的な取り扱いには重要ではあるが，本講義で用いる範囲では，特に意識しなくともよい．また時間区間を $t \ge 0$ の中でのみ考えているが，線形微分方程式の初期値問題や，制御システムでの入出力応答を考えるときには，この扱いで十分である．

式 (7.1) では，変換する関数が f であることを強調するためにラプラス変換の記号として $\mathcal{L}\left[f\right]$ を用いている．簡略して書くときには，時間領域の信号 f に対して大文字 F や $\hat{f}$ などの記号を用いることもある．

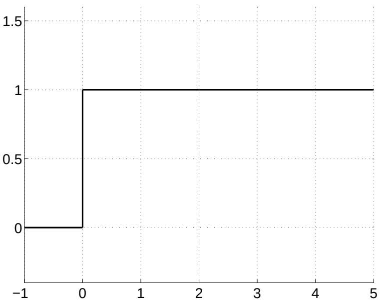

図 7.1：単位階段関数

例 7.1　　関数 $f(t) = 1,\ t \ge 0$ を考える（図 7.1 参照）．そのラプラス変換を計算すると

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[f\right](s) &= \int_0^\infty e^{-st}\,dt \\ &= \left[-\frac{e^{-st}}{s}\right]_{t=0}^\infty \\ &= \frac{1}{s}, \quad \operatorname{Re} s > 0\end{aligned}$$

を得る．

例 7.2　　関数 $f(t) = e^{at},\ t \ge 0$ を考える．図 7.2 では，実線で $a = 0.2$ のとき，破線で $a = -0.1$ のときを示している．ラプラス変換を計算すると

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[f\right](s) &= \int_0^\infty e^{at}e^{-st}\,dt \\ &= \left[-\frac{e^{-(s-a)t}}{s-a}\right]_{t=0}^\infty \\ &= \frac{1}{s-a}, \quad \operatorname{Re} s > \operatorname{Re} a\end{aligned}$$

を得る．

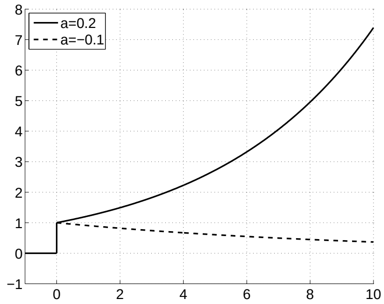

図 7.2：指数関数

例 7.2 において，$a = 0$ とすれば，指数関数は単位階段関数となる．そのとき（当然ながら）ラプラス変換は $1/s$ となり，例 7.1 に一致している．また例 7.2 においては，定数 a は複素数であってもよいことに気をつける．

7.2　ラプラス変換の基本性質

本節では，前節で定義したラプラス変換がもつ基本性質を調べる．これらの基本性質は，いくつかの関数のラプラス変換を求めるために役立つばかりではなく，線形システムの振る舞いを知る際にも有用である．

性質 7.1　　ラプラス変換は線形性をもつ．つまり時間関数 f, g の和 $h = f + g$ を $h(t) = f(t) + g(t)$ とするとき

$$\mathcal{L}\left[f+g\right] = \mathcal{L}\left[f\right] + \mathcal{L}\left[g\right] \tag{7.2}$$

が成り立ち，時間関数 f のスカラー倍 $g = kf$ を $g(t) = kf(t)$ とするとき

$$\mathcal{L}\left[kf\right] = k\mathcal{L}\left[f\right]. \tag{7.3}$$

が成り立つ．

式 (7.2) については，

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[h\right](s) &= \int_0^\infty h(t)e^{-st}\,dt \\ &= \int_0^\infty \left(f(t)+g(t)\right)e^{-st}\,dt \\ &= \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt + \int_0^\infty g(t)e^{-st}\,dt \\ &= \mathcal{L}\left[f\right](s) + \mathcal{L}\left[g\right](s)\end{aligned}$$

により導かれる．式 (7.3) については，

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[g](s) &= \int_0^\infty g(t)e^{-st}\,dt \\ &= \int_0^\infty kf(t)e^{-st}\,dt \\ &= k\int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt \\ &= k\mathcal{L}[f](s)\end{aligned}$$

から示すことができる．

次に時間関数 f, g のたたみ込み積について考える．$h = f * g$ を

$$h(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau \tag{7.4}$$

と定めて，たたみ込み積という．たたみ込み積が $f*g = g*f$, $(f+g)*h = f*h + g*h$ などを満たすことは容易に示せるので，各自確かめられたい．

性質 7.2　　関数 f, g のたたみ込み積 $h = f * g$ について

$$\mathcal{L}[h] = \mathcal{L}[f]\,\mathcal{L}[g] \tag{7.5}$$

が成り立つ．

式 (7.5) については，

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[h](s) &= \int_0^\infty h(t)e^{-st}\,dt \\ &= \int_0^\infty \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau\; e^{-st}\,dt \\ &= \int_0^\infty \int_\tau^\infty f(t-\tau)e^{-s(t-\tau)}\,dt\; g(\tau)e^{-s\tau}\,d\tau \\ &= \mathcal{L}[f](s)\mathcal{L}[g](s)\end{aligned}$$

によって示すことができる．

性質 7.3　　時間関数の積分

$$g(t) = \int_0^t f(\tau)\,d\tau$$

を考えると

$$\mathcal{L}[g](s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}[f](s) \tag{7.6}$$

が成り立つ．

積分は単位階段関数とのたたみ込みと同じであることに注意する．すると階段関数を p として例 7.1 と性質 7.2 によって

$$g(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau = \int_0^t p(t-\tau)f(\tau)d\tau = (p*f)(t)$$

$$\mathcal{L}[g](s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}[f](s)$$

が満たされている．

性質 7.4　　時間関数の微分

$$g(t) = \frac{df}{dt}(t)$$

を考えると

$$\mathcal{L}[g](s) = s\mathcal{L}[f](s) - f(0) \tag{7.7}$$

が成り立つ．

ここで関数 f が

$$f(t) = f(0) + \int_0^t g(\tau)\,d\tau \tag{7.8}$$

と与えられるときには，性質 7.3 で見たように

$$\mathcal{L}[f - f(0)](s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}[g](s)$$

である．また定数 $f(0)$ については階段関数（例 7.1）の $f(0)$ 倍であるので，性質 7.1 を適用して

$$\mathcal{L}[f](s) - \frac{f(0)}{s} = \frac{1}{s}\mathcal{L}[g](s)$$

である．これから式 (7.7) が成り立っていることがわかる．

注意 7.1　　性質 7.4 を繰り返し適用することによって

$$g(t) = \frac{d^k f}{dt^k}(t)$$

であるときには

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[g](s) = s^k\mathcal{L}[f](s) - s^{k-1}f(0) \\ - \cdots - sf^{(k-2)}(0) - f^{(k-1)}(0)\end{aligned} \tag{7.9}$$

である．

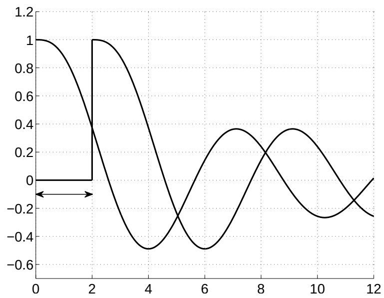

図 7.3：時間関数の時間軸移動

性質 7.5　　時間関数の時間軸移動

$$g(t) = f(t-T), \quad T > 0$$

を考える（図 7.3 参照）．このとき

$$\mathcal{L}[g](s) = e^{-sT}\mathcal{L}[f](s). \tag{7.10}$$

が成り立つ．

定義にしたがって計算すれば

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[g](s) &= \int_0^\infty g(t)e^{-st}\,dt \\ &= \int_0^\infty f(t-T)e^{-st}\,dt \\ &= \int_T^\infty f(t-T)e^{-s(t-T)}e^{-sT}\,dt \\ &= e^{-sT}\int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt \\ &= e^{-sT}\mathcal{L}[f](s)\end{aligned}$$

を得る．

性質 7.6　関数 f のラプラス変換を複素平面上で a 移動して $\mathcal{L}[f](s-a)$ という関数を考えると，これは，$g(t)=f(t)e^{at}$ のラプラス変換である．つまり

$$\mathcal{L}[g](s)=\mathcal{L}[f](s-a)$$

が成り立つ．

これは

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[g](s)&=\int_0^\infty g(t)e^{-st}\,dt\\&=\int_0^\infty f(t)e^{at}e^{-st}\,dt\\&=\int_0^\infty f(t)e^{-(s-a)t}\,dt\\&=\mathcal{L}[f](s-a)\end{aligned}$$

から導くことができる．

性質 7.7　定数 $a>0$ に考えて $g(t)=f(at)$ とすれば

$$\mathcal{L}[g](s)=\frac{1}{a}\mathcal{L}[f]\left(\frac{s}{a}\right).$$

が成り立つ．

定義から計算すれば

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[g](s)&=\int_0^\infty g(t)e^{-st}\,dt\\&=\int_0^\infty f(at)e^{-st}\,dt\\&=\int_0^\infty f(at)e^{-\frac{s}{a}at}\,\frac{dat}{a}\\&=\frac{1}{a}\mathcal{L}[f]\left(\frac{s}{a}\right)\end{aligned}$$

である．

注意 7.2　性質 7.7 を逆に考える．$a>0$ に関して，$\frac{1}{a}\mathcal{L}[f]\left(\frac{s}{a}\right)$ とすれば，これは $g(t)=f(at)$ のラプラス変換である．

7.3　基本性質の適用例

ここでは，7.2 節での基本性質から導かれるいくつか重要な結果をまとめておく．

例 7.3　余弦関数 $f(t)=\cos\omega t$ と正弦関数 $g(t)=\sin\omega t$ について

$$\mathcal{L}[f](s)=\frac{s}{s^2+\omega^2} \tag{7.11}$$

$$\mathcal{L}[g](s)=\frac{\omega}{s^2+\omega^2} \tag{7.12}$$

が成り立つ．

三角関数を

$$\begin{aligned}\cos\omega t&=\frac{e^{j\omega t}}{2}+\frac{e^{-j\omega t}}{2},\\\sin\omega t&=\frac{e^{j\omega t}}{2j}-\frac{e^{-j\omega t}}{2j}\end{aligned}$$

と指数関数を用いて記述すれば，性質 7.1 より

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f](s)&=\frac{1}{2(s-j\omega)}+\frac{1}{2(s+j\omega)}\\&=\frac{s+j\omega+s-j\omega}{2(s-j\omega)(s+j\omega)}\\&=\frac{s}{s^2+\omega^2}\end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[g](s)&=\frac{1}{2j(s-j\omega)}-\frac{1}{2j(s+j\omega)}\\&=\frac{s+j\omega-s+j\omega}{j2(s-j\omega)(s+j\omega)}\\&=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\end{aligned}$$

が満たされている．

例 7.4　k 次の多項式 $p_k(t)=t^k$ を考える（ここで p_0 は階段関数であることに注意する）．このとき

$$\mathcal{L}[p_k](s)=\frac{k!}{s^{k+1}} \tag{7.13}$$

である．

階段関数とのたたみ込み積分を考えると

$$\begin{aligned}(p_0*p_k)(t)&=\int_0^t p_0(t-\tau)p_k(\tau)\,d\tau\\&=\int_0^t \tau^k\,d\tau\\&=\left[\frac{\tau^{k+1}}{k+1}\right]_{\tau=0}^t\\&=\frac{p_{k+1}}{k+1}\end{aligned}$$

であることに注意する．すると性質 7.2 を用いて帰納的に

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[p_0](s)&=\frac{1}{s},\quad \text{（階段関数）}\\\mathcal{L}[p_1](s)&=\mathcal{L}[p_0](s)\mathcal{L}[p_0](s)=\frac{1}{s^2},\\\mathcal{L}[p_2](s)&=2\mathcal{L}[p_0](s)\mathcal{L}[p_1](s)=\frac{2}{s^3},\\&\vdots\\\mathcal{L}[p_k](s)&=k\mathcal{L}[p_0](s)\mathcal{L}[p_{k-1}](s)=\frac{k!}{s^{k+1}},\\&\vdots\end{aligned}$$

が成り立つ．

例 7.5　実数定数 σ,ω に対して，関数

$$\begin{aligned}f(t)&=e^{\sigma t}\cos\omega t,\\g(t)&=e^{\sigma t}\sin\omega t\end{aligned}$$

を考える．このとき

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f](s)&=\frac{(s-\sigma)}{(s-\sigma)^2+\omega^2}\\\mathcal{L}[g](s)&=\frac{\omega}{(s-\sigma)^2+\omega^2}\end{aligned}$$

である．

性質 7.6 と例 7.3 から，例 7.5 が正しいことがわかる．なお，例 7.5 の関数を $\sigma = 0.2, \omega = 2$ の場合を実線にて，$\sigma = -0.1, \omega = 2$ の場合を破線にて図 7.4 に示す．

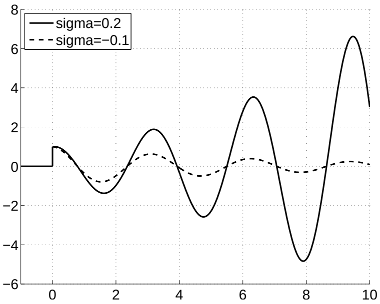

図 7.4：$e^{\sigma t}\cos\omega t$ のグラフ

7.4　デルタ関数

まず $c > 0$ をパラメータにもつ時間関数 f_c を

$$f_c(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{c}, & 0 \leq t < c, \\ 0, & t \geq c, \quad t < 0 \end{cases}$$

で定める（図 7.5 参照）．f_c は単位階段関数から単位階段関数を c だけ平行移動して差し引いたものに $1/c$ を乗じて得られるので，性質 7.1, 7.5 より

$$\mathcal{L}\left[f_c\right](s) = \frac{1}{sc} - \frac{e^{-sc}}{sc} = \frac{1-e^{-sc}}{sc} \qquad (7.14)$$

である．

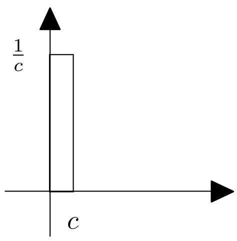

図 7.5：関数 f_c

ここで $c \to 0$ の極限では，f_c は通常の意味では $t = 0$ で発散するので収束しないが，$f_c(t) \geq 0$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_c(t)dt = 1 \qquad (7.15)$$

であり，かつ $t = 0$ で連続な関数 g を考えると

$$\lim_{c\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} g(t)f_c(t)dt = g(0) \qquad (7.16)$$

が成り立っている．極限はこのような性質を満たす "関数" であると考えて，これをデルタ関数といい，$\delta(t)$ で表記する．

デルタ関数のラプラス変換は，

$$\lim_{c\to 0}\int_{0}^{\infty} f_c(t)e^{-st}\,dt$$

で定めることとする．これに式 (7.14) をあてはめれば

$$\mathcal{L}\left[\delta\right](s) = 1$$

であることがわかる．

デルタ関数は単位階段関数の "微分" と考えることができる．単位階段関数を $f(t)$ とすれば $t \neq 0$ では普通の意味で微分可能であり $\frac{df}{dt}(t) = 0$ である．$t = 0$ では微分不可能となっている．もし単位階段関数の微分を $t \neq 0$ で 0 となる関数であると考えると微積分の基本的な式である

$$f(t) = f(t_0) + \int_{t_0}^{t}\frac{df}{dt}\,dt \qquad (7.17)$$

を $t_0 < 0$ とすれば満たさない．ところが階段関数の微分をデルタ関数と考えれば，式 (7.17) が成り立つことがわかる．$t_0 \to 0, t_0 < 0$ の極限を考えて

$$f(t) = f(0_-) + \int_{0_-}^{t}\frac{df}{dt}\,dt \qquad (7.18)$$

と書くことにする．

こうするとき微積分に関するラプラス変換に性質 7.3, 7.4 が成りたつことに注意したい．ただし単位階段関数の $t = 0$ での値の代わりに $t < 0, t \to 0$ での極限を考えて $0 = \lim_{t\to 0, t<0} f(t) =: f(0_-)$ として，式 (7.7) において，$f(0)$ を $f(0_-)$ と読み替えれば成り立っている．

ここでデルタ関数を含んだたたみ込み積を考える．時間関数 f とデルタ関数とのたたみ込み積は式 (7.16) より

$$\int_0^t f(t-\tau)\delta(\tau)\,d\tau = f(t)$$

であるので，$f * \delta = f$ である．$\delta * f = f$ も同様である．このようにたたみ込み積においてデルタ関数は単位元として働いている．

ラプラス変換とたたみ込み積に関係を考えると $\mathcal{L}\left[\delta\right](s) = 1$ だから $F(s)\mathcal{L}\left[\delta\right](s) = \mathcal{L}\left[\delta\right](s)F(s) = F(s)$ が成り立つ．したがってデルタ関数を含めてたたみ込み積を考えても性質 7.2 が成り立っていることに注意したい．

7.5　逆ラプラス変換

まずこれまでに得られたいくつかの関数のラプラス変換の表を与えておく．表 7.1 の関数のラプラス変換は，すべて複素数 s の有理関数になっている．

表 7.1：ラプラス変換

$f(t)$	$\mathcal{L}\left[f\right](s)$
δ-関数	1
単位階段関数	$\frac{1}{s}$
$\exp(at)$	$\frac{1}{s-a}$
$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
t	$\frac{1}{s^2}$
$\frac{t^k}{k!}$	$\frac{1}{s^{k+1}}$
$\frac{t^k\exp(at)}{k!}$	$\frac{1}{(s-a)^{k+1}}$
$\exp(at)\cos\omega t$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$
$\exp(at)\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$

逆に複素数 s の有理関数 $F(s)$ が与えられたとする．このときに $\mathcal{L}\left[f\right](s) = F(s)$ となる時間関数 $f(t)$

を求めたい．有理関数は，分母多項式と分子多項式の比に記述したとき，分子多項式の次数が分母多項式の次数を上回らないときプロパーであるという．

プロパーな有理関数 $F(s)$ を，その極（分母多項式を 0 とする s の値）を $s = p_1, p_2, \dots, p_m$ として

$$F(s) = c_0 + \frac{c_1}{s-p_1} + \frac{c_2}{s-p_2} + \cdots + \frac{c_m}{s-p_m} \quad (7.19)$$

と部分分数に展開する．ただしここでは極は重複していないものとしている．式 (7.19) の各項は表 7.1 によって，時間関数を求めることができる．そして性質 7.1 によって時間関数を考えると

$$f(t) = c_0\delta(t) + c_1\exp(p_1 t) + c_2\exp(p_2 t) + \cdots + c_m\exp(p_m t) \quad (7.20)$$

であることがわかる．極が複素数であるときでも式 (7.20) は有効であるが，例 7.5 を用いると指数関数や三角関数を用いて表現できる．

極に重複度がある場合にも表 7.1 を用いて時間関数を求めることができる．記号が込み入るので，一般的な記述は避けて次の例についてのみ説明する．

例 7.6　ラプラス変換

$$F(s) = \frac{7s^2-3s+2}{s^3-3s+2}$$

を考える．極は $s=1$, $s=-2$ にあり，これらの極で部分分数に展開すると

$$F(s) = \frac{2}{(s-1)^2} + \frac{3}{s-1} + \frac{4}{s+2}$$

である．表 7.1 を用いて時間関数を求めると

$$f(t) = 2t\exp(t) + 3\exp(t) + 4\exp(-2t)$$

である．

ラプラス変換から時間関数にもどす逆ラプラス変換は，複素平面上の積分を用いて表現できるが，ここでは省略するので興味のある人は文献 [K] などを参照されたい．

本節の最後として，ラプラス変換の最終値定理について述べておく．本節では，ラプラス変換が有理関数で表されるクラスに限定する．

性質 7.8　プロパーな有理関数 $F(s)$ で与えられるラプラス変換をもつ時間関数 $f(t)$ を考える．$F(s)$ が原点以外には実部が非負となる極をもたず，かつ原点の極は存在しても重複していないものとする．このとき

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s) \quad (7.21)$$

が成り立つ．

極に重複がない場合についてのみ説明しておく．式 (7.19) において，極が $p_1 = 0$ として $\mathrm{Re}\, p_i < 0$, $i = 2, \cdots, m$ とすれば，対応する時間関数は式 (7.20) で与えられ，$\exp(p_1 t)$ 以外の項は $t \to 0$ のときに 0 に収束する．つまり $\lim_{t\to\infty} f(t) = c_1$ である．一方式 (7.19) において，$sF(s)$ を考えると $\lim_{s\to 0} sF(s) = c_1$ であることもわかる．

7.6　線形微分方程式の解法への適用

ここではラプラス変換を用いて線形微分方程式を解くことを考える．まず 1 階線形微分方程式の初期値問題を考える．

$$\frac{dy}{dt} + ay = u, \quad y(0) = y_0. \quad (7.22)$$

時間関数 y, u のラプラス変換をそれぞれ $Y(s)$, $U(s)$ と表す．もし y, u が式 (7.22) を満たすならば，それらのラプラス変換 Y, U は性質 7.1, 7.4 を用いて

$$sY(s) - y_0 + aY(s) = U(s) \quad (7.23)$$

を満たす．式 (7.23) は $U(s)$ が与えられていて $Y(s)$ に関して解くべきと考えれば，代数方程式になっており

$$Y(s) = \frac{y_0}{s+a} + \frac{1}{s+a}U(s) \quad (7.24)$$

を得る．

例題 7.2 と性質 7.2 より，式 (7.24) を時間関数として考えれば，

$$y(t) = y(0)\exp(-at) + \int_0^t \exp(-(a-\tau))u(\tau)\, d\tau$$

である．これは微分方程式の解として導いた式 (5.6) と同一になっている．このようにラプラス変換を用いることによって微分方程式 (7.22) の解を求めることができた．

上記の方法を 2 階以上の線形微分方程式の求解に拡張することができる．微分方程式

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\frac{dy}{dt} + a_n y = u,$$
$$y(0) = y_0, \frac{dy}{dt}(0) = y_0^{(1)}, \dots, \frac{dy^{n-1}}{dt^{n-1}}(0) = y_0^{(n-1)} \quad (7.25)$$

を考える．時間関数 $y(t)$ と $u(t)$ が式 (7.6) を満たすとすれば，それらのラプラス変換 $Y(s)$, $U(s)$ は性質 7.1, 7.4 および注意 7.1 を用いると

$$\begin{aligned} &s^n Y(s) - s^{n-1}y_0 - \cdots - y_0^{(n-1)} \\ &\quad + a_1\left(s^{n-1}Y(s) - s^{n-2}y_0 - \cdots - y_0^{(n-2)}\right) \\ &\quad + \cdots + a_{n-1}(sY(s) - y_0) + a_n Y(s) = U(s) \end{aligned}$$

となるので

$$Y(s) = \frac{\text{初期値に依存した多項式}}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n} + \frac{U(s)}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n} \quad (7.26)$$

である．

式 (7.26) 右辺第 1 項は，7.5 節で述べたプロパーな有理関数であるので，部分分数展開から時間関数を求めることができる．

式 (7.26) 右辺第 2 項については，

$$H(s) = \frac{1}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n} \quad (7.27)$$

とおくと，$H(s)U(s)$ と積になっているので，性質 7.2 より，$H(s)$ の時間関数 $h(t)$ と外部入力 $u(t)$ とのたたみ込み積になっている．$H(s)$ は 7.5 節で述べたプロパーな有理関数なので，部分分数展開により $h(t)$ を求めることができる．

入力 $u(t)$ が表 7.1 に表れる関数の場合，$U(s)$ も有理関数になるので，積 $H(s)U(s)$ はプロパーな有理関数である．このときには，$H(s)U(s)$ を部分分数展開してその時間関数を求めることもできる．

なお式 (7.27) で定めた $H(s)$ を微分方程式 (7.6) で記述される系の伝達関数という．またその逆ラプラス変換 $h(t)$ をインパルス応答という．これらの考え方については，章をあらためて説明する．

練習問題

【1】 式 (7.4) で定めたたたみ込み積について以下の式が成り立つことを確認せよ．

(i) $(f * g) * h = f * (g * h)$.

(ii) $f * g = g * f$.

(iii) $(f + g) * h = f * h + g * h$.

【2】 次の関数の逆ラプラス変換を求めよ．

(i) $F(s) = \dfrac{s+1}{s^2 - 3s + 2}$.

(ii) $F(s) = \dfrac{s+2}{s^3 + 3s^2 + 4s + 2}$.

(iii) $F(s) = \dfrac{1}{s^4 + 2s^3 + s^2}$.

参考文献

[K] 片山徹，フィードバック制御の基礎，朝倉書店，1987.