

## 8 伝達関数によるシステム表現

### 8.1 伝達関数，インパルス応答，ステップ応答

5 章では 1 階および 2 階線形微分方程式で記述されるシステムに関して述べてきた．それらのシステムの応答は，初期値によって定まる応答と，外部入力によって定まる応答の和として与えられていた．このうち外部入力によって定まる応答についてもう少し考察してみたい．

1 階線形微分方程式

$$\frac{dy}{dt} + ay = u, \quad y(0) = y_0 \quad (8.1)$$

について，その解を求める．時間関数  $y, u$  のラプラス変換をそれぞれ  $Y(s), U(s)$  として

$$(s + a)Y(s) - y_0 = U(s),$$

$$Y(s) = \frac{y_0}{s + a} + \frac{U(s)}{s + a}.$$

を満たす．ここで初期値を  $y_0 = 0$  とすれば，出力  $y$  のラプラス変換と入力  $u$  のラプラス変換の比率は，入りに依存せず

$$H(s) = \frac{1}{s + a} \quad (8.2)$$

で与えられる．式 (8.2) で与えられる  $H(s)$  を 1 階線形微分方程式が記述する系の伝達関数という．

初期値 0 のときの応答を時間関数として考える．伝達関数の逆ラプラス変換を  $h(t)$  とすれば，

$$y(t) = \int_0^t h(t - \tau)u(\tau) d\tau \quad (8.3)$$

となる．式 (8.2) の伝達関数  $H(s)$  の場合，

$$h(t) = \exp(-at)$$

であるから，式 (8.3) は具体的には

$$y(t) = \int_0^t \exp(-a(t - \tau))u(\tau) d\tau$$

である．伝達関数の逆ラプラス変換  $h(t)$  をインパルス応答とよぶ．7.4 節で考えたデルタ関数のラプラス変換が 1 であったことを考えると，インパルス応答  $h(t)$  は，入りにデルタ関数を加えたときの出力となっている．

式 (8.3) のように出力がインパルス応答と入力のたたみ込み積になることをもう少し説明しておく．インパルス状の入力（デルタ関数およびその時間移動した関数）がある時刻に加わると，インパルス応答およびその時間移動した関数の波形が出力される．複数のそのような入力加わると，それらの応答の和が系の応答になる．たとえば入力（デルタ関数の定数倍）の加わる時刻を  $t_0, t_1$  として（それぞれ単位デルタ関数の

$u_0, u_1$  倍），時刻  $t$  での応答は，インパルス応答を  $h(t)$  とすれば応答の線形性より

$$y(t) = u_0h(t - t_0) + u_1h(t - t_1)$$

が成り立つ（図 8.1 参照）．ここで入力の加わる時刻を多くして，極限を考えると式 (8.3) が成り立つことがわかる．

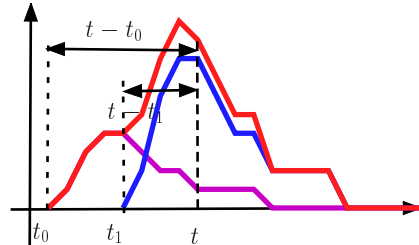


図 8.1：インパルス状の入力による応答

インパルス応答は，入りにデルタ関数の加わったときの応答であったが，入りに単位階段関数が加わったときの応答をステップ応答とよぶ．これも 1 階の線形微分方程式を例として考えておこう．

$$\frac{dy}{dt} + ay = 1, \quad y(0) = 0. \quad (8.4)$$

$Y(s)$  を  $y$  のラプラス変換として，式 (8.4) より

$$sY(s) + aY(s) = \frac{1}{s} \quad (8.5)$$

である．式 (8.5) から

$$Y(s) = H(s)\frac{1}{s} \quad (8.6)$$

となる．ただし  $H(s)$  は式 (8.2) で与えられる伝達関数である．

$$Y(s) = \frac{1}{a} \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{s + a} \right)$$

になるので，

$$y(t) = \frac{1}{a} (1 - \exp(-at))$$

である．この応答をステップ応答という．

ここで式 (8.6) は，ステップ応答がインパルス応答の積分であることを表している（性質 7.3 参照）ことに注意しておく．

これまで 1 階線形微分方程式に関して伝達関数などの考え方を示してきたが，一般の線形システムに対しても伝達関数やインパルス応答の考えを導入することができる．このことを高階線形微分方程式

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dy}{dt} + a_n y = b_1 \frac{d^{n-1} u}{dt^{n-1}} + \cdots + b_{n-1} \frac{du}{dt} + b_n u \quad (8.7)$$

について述べておく．

式 (8.7) を満たす  $y, u$  のラプラス変換を  $Y(s), U(s)$  として、初期条件がすべて 0 であることを用いて性質 7.4 および注意 7.1 を適用すれば、

$$\begin{aligned} & (s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n) Y(s) \\ & = (b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n) U(s). \end{aligned}$$

である．これから

$$H(s) = \frac{b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} \quad (8.8)$$

とすれば、

$$Y(s) = H(s)U(s)$$

となる．式 (8.8) を式 (8.7) で記述されるシステムの伝達関数という．伝達関数  $H(s)$  の逆ラプラス変換  $h$  をインパルス応答という．初期条件が 0 であれば

$$y(t) = \int_0^t h(t - \tau)u(\tau) d\tau$$

が成り立ち、出力はインパルス応答と入力とのたたみ込み積である．インパルス応答の積分は、単位階段関数を入力したときの応答でもあり、これをステップ応答という．

## 8.2 一次系と伝達関数

8.1 節では、一次系 (8.1) を例にとって伝達関数、インパルス応答、ステップ関数を説明したので、ここではまずそれらをまとめておく．

1 階線形微分方程式において初期値応答は考えずに

$$\frac{dy}{dt} + ay = u, \quad y(0) = 0$$

とするとき、 $u, y$  のラプラス変換を  $U(s), Y(s)$  として伝達関数

$$H(s) = \frac{1}{s + a}$$

は  $Y(s) = H(s)U(s)$  を満たす．伝達関数の逆ラプラス変換はインパルス応答とよばれ

$$h(t) = \exp(-at)$$

である．またその積分はステップ応答とよばれ

$$y(t) = \frac{1}{a} (1 - \exp(-at))$$

であり、システムに単位階段関数を入力したときの出力でもある．

伝達関数は  $-a$  に極をもつ．インパルス応答は  $t \rightarrow \infty$  であるとき  $a > 0$  ならば減衰、 $a < 0$  ならば発散する．また  $a > 0$  のとき、 $a$  が大きいほどインパルス応答は速く減衰する．ステップ応答に関しては、 $a > 0$  のとき  $1/a$  に収束する．

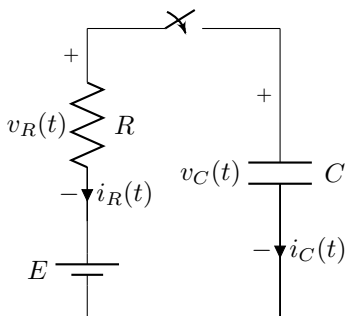


図 8.2：電源付き RC 回路

これらのことを図 8.2 の RC 回路を例にとって見ておく．キャパシタ初期電圧が  $v_C(0) = 0$  であるとすれば、RC 回路は

$$RC \frac{dv_C}{dt} + v_C = E$$

を満たすので、そのラプラス変換を考えて

$$\mathcal{L}[v_C](s) = \frac{1}{RCs + 1} \frac{E}{s}$$

となっている．

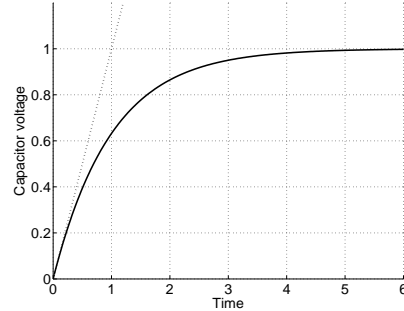


図 8.3：RC 回路の応答

キャパシタ電圧初期値  $v_C(0) = 0$  として時刻  $t = 0$  でスイッチを閉じた場合、

$$v_C(t) = E \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \right\}$$

となる．この応答は、定常値  $E$  に漸近する．さらに時刻 0 での接線が定常値  $E$  に達する時間は  $RC$  であることもわかる図 8.3 では、 $E = 1, RC = 1$  の場合について応答を実線、時刻 0 での接線を点線で示す．

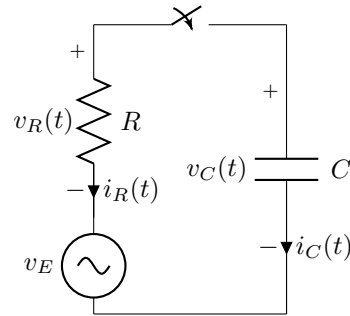


図 8.4：交流電源付き RC 回路

次に図 8.4 に示すように交流電源をおいた場合の応答を考える．この場合の解析は、回路理論を用いれば容易ではあるが、1 次系の応答とからめて考えるために、ラプラス変換を用いて考えておく．

周期関数  $v_E(t) = Ee^{j\omega t}$  を入力したとすればそのときの応答は

$$\begin{aligned} H(s) & \frac{E}{s - j\omega} \\ & = \frac{H(j\omega)E}{s - j\omega} + \frac{(H(s) - H(j\omega))E}{s - j\omega} \end{aligned}$$

である．ここで第 1 項は  $s = j\omega$  にのみ極をもち逆ラプラス変換は  $H(j\omega)Ee^{j\omega t}$  である．第 2 項は  $s = j\omega$  は分母分子で相殺するので  $H(s)$  の極にのみ極をもつことに注意する．すると逆ラプラス変換は減衰する指

数関数である．このことから十分時間が経過したときの応答は

$$v_C(t) = H(j\omega) E e^{j\omega t}$$

であることがわかる． $H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\theta}$  と極座標表示すれば

$$v_C(t) = |H(j\omega)| E e^{j(\omega t + \theta)}$$

となっている．ただし

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + R^2 C^2 \omega^2}},$$

$$\theta = -\tan^{-1} RC\omega$$

であることに注意したい．つまり位相が  $\tan^{-1} RC\omega$  遅れていることになる．ところで入力の実数関数  $v_E(t) = E \cos \omega t = \text{Re } E e^{j\omega t}$  であるときは実部をとって

$$v_C(t) = \text{Re } |H(j\omega)| E e^{j(\omega t + \theta)}$$

$$= |H(j\omega)| E \cos(\omega t + \theta).$$

であることにも注意しておく．

### 8.3 二次系と伝達関数

2 階線形微分方程式

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_2 y = bu, \quad (8.9)$$

$$\frac{dy}{dt}(0) = 0, \quad y(0) = 0,$$

で記述される系を考える．時間関数  $y, u$  のラプラス変換をそれぞれ  $Y(s), U(s)$  とすれば，式 (8.9) より

$$H(s) = \frac{b}{s^2 + a_1 s + a_2} \quad (8.10)$$

が伝達関数である．

ここで RLC 回路や質点ばねダンパー系などにあてはまるように極の実部が負と仮定すれば， $a_1 > 0, a_2 > 0$  であるので新しいパラメータ  $\omega_n > 0, \zeta > 0$  を用意して  $a_2 = \omega_n^2, a_1 = 2\zeta\omega_n$  とおく式 (8.10) の伝達関数は

$$H(s) = \frac{b}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (8.11)$$

とかける．ここで  $\zeta$  は減衰係数， $\omega_n$  は自然角周波数とよばれる．また以下では，定数  $b = \omega_n^2$  として考える．これは全体を定数倍するだけなので，このような規格化をする．

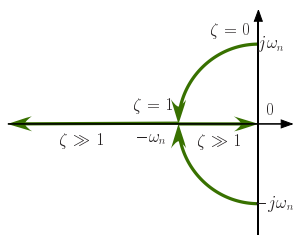


図 8.5 : 2 次系の極

伝達関数 (8.11) の極は  $0 < \zeta < 1$  のとき  $-\zeta\omega_n \pm j\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n$ ， $\zeta = 1$  のとき  $-\omega_n$  の重複した実数， $\zeta > 1$  のとき  $-\zeta\omega_n \pm \sqrt{\zeta^2-1}\omega_n$  と相異なる実数になる． $\zeta$  を次第に大きくしたときの複素平面内での極の位置を図 8.5 に示す．

まず  $0 < \zeta < 1$  のとき，共役な複素極となるが，それらを  $-\zeta\omega_n \pm j\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n = -\omega_n e^{\pm j\theta}$ ， $\cos \theta = \zeta$  と書く．伝達関数を

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$= \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}(s + \zeta\omega_n)^2 + (1-\zeta^2)\omega_n^2}$$

と変形すれば，インパルス応答は

$$h(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} \exp(-\zeta\omega_n t) \sin \sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t$$

であることがわかる．図 8.6 に示すように振動的に減衰することがわかる．ここで  $\omega_n = 1$  にとっており， $\zeta = 0.1, 0.3, 0.5, .0.7$  の場合をそれぞれ実線，点線，鎖線，破線で表わしている． $\zeta$  が小さいほど，減衰が遅いことがわかる．また  $\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n$  は減衰振動の角周波数になっている．

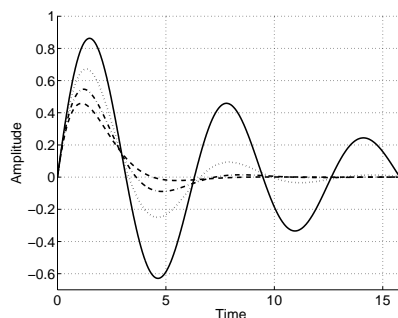


図 8.6 : 2 次系のインパルス応答 (複素極)

次に単位階段関数を加えたときの出力 (ステップ応答) を考える．ラプラス変換より

$$H(s) \frac{1}{s} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \frac{1}{s}$$

$$= \frac{1}{s} - \frac{s + 2\zeta\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$= \frac{1}{s} - \frac{(s + \zeta\omega_n)}{(s + \zeta\omega_n)^2 + (1-\zeta^2)\omega_n^2}$$

$$- \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}(s + \zeta\omega_n)^2 + (1-\zeta^2)\omega_n^2}$$

であるので，その逆ラプラス変換からステップ応答は

$$y(t) = 1 - \frac{\exp(-\zeta\omega_n t)}{\sqrt{1-\zeta^2}} \left\{ \sqrt{1-\zeta^2} \cos \sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t \right.$$

$$\left. + \zeta \sin \sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t \right\}$$

$$= 1 - \frac{\exp(-\zeta\omega_n t)}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \left( \sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t + \theta \right),$$

$$\cos \theta = \zeta$$

と計算できる．

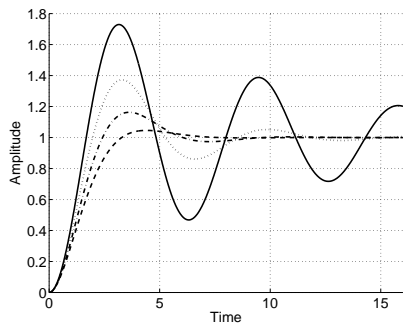


図 8.7：2 次系のステップ応答（複素極）

図 8.7 においてステップ応答を示す．ここで  $\omega_n = 1$  にとっており， $\zeta = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7$  の場合をそれぞれ実線，点線，鎖線，破線で表わしている． $\zeta$  が小さいほど，定常値 1 への収束が遅いことがわかる．

5.4.2 節で考えた RLC 回路においては，抵抗値が小さいとき（具体的には  $R^2 < 4L/C$  であるとき）に，極が共役複素数になる．また 5.4.3 節で考えた質点ばねダンパー系については，ダンパー係数が小さいとき（具体的には  $D^2 - 4MK < 0$  であるとき）に，極が共役複素数になる．

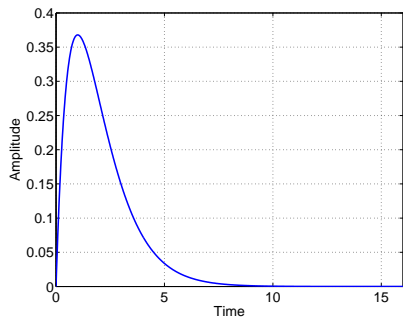


図 8.8：2 次系のインパルス応答（重複極）

次に  $\zeta = 1$  の場合を考える．このとき伝達関数  $H(s)$  は  $-\omega_n$  に重複した実数の極をもつ．

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\omega_n^2}{(s + \omega_n)^2}$$

となるので，インパルス応答は

$$h(t) = \omega_n^2 t \exp(-\omega_n t)$$

である．図 8.8 に  $\omega_n = 1, \zeta = 1$  のときのインパルス応答を示す．

次に単位階段関数を加えたときのステップ応答を考える．ステップ応答はインパルス応答の積分であるので，

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t h(\tau) d\tau \\ &= \int_0^t \omega_n^2 \tau \exp(-\omega_n \tau) d\tau \\ &= [-\omega_n \tau \exp(-\omega_n \tau)]_{\tau=0}^t \\ &\quad + \int_0^t \omega_n \exp(-\omega_n \tau) d\tau \\ &= -\omega_n t \exp(-\omega_n t) + [-\exp(-\omega_n \tau)]_{\tau=0}^t \\ &= 1 - (1 + \omega_n t) \exp(-\omega_n t) \end{aligned}$$

と計算される．図 8.9 に  $\omega_n = 1, \zeta = 1$  のときのステップ応答を示す．

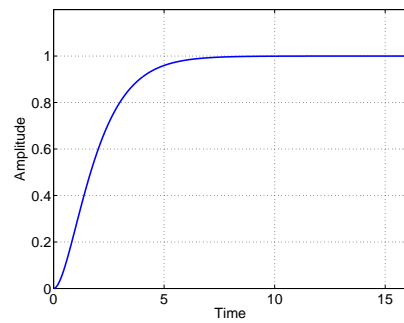


図 8.9：2 次系のステップ応答（重複極）

最後に  $\zeta > 1$  の場合を考える．このとき，極は相異なる実数となり， $p_1 = -\zeta\omega_n + \sqrt{\zeta^2 - 1}\omega_n$ ， $p_2 = -\zeta\omega_n - \sqrt{\zeta^2 - 1}\omega_n$  にある．このとき伝達関数は

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \\ &= \frac{p_1 p_2}{(s - p_1)(s - p_2)} \\ &= \frac{p_1 p_2}{(p_1 - p_2)(s - p_1)} - \frac{p_1 p_2}{(p_1 - p_2)(s - p_2)} \end{aligned}$$

となるので，インパルス応答は

$$h(t) = \frac{p_1 p_2}{(p_1 - p_2)} \exp(p_1 t) - \frac{p_1 p_2}{(p_1 - p_2)} \exp(p_2 t)$$

によって与えられる．図 8.10 に  $\omega_n = 1$  の場合のインパルス応答を示す．ここで

$$\zeta = \frac{5}{4}, \quad \zeta = \frac{17}{8}, \quad \zeta = \frac{65}{16}$$

の場合をそれぞれ実線，点線，鎖線で表わしている．このとき極はそれぞれ

$$p_1 = -\frac{1}{2}, \quad p_2 = -2,$$

$$p_1 = -\frac{1}{4}, \quad p_2 = -4,$$

$$p_1 = -\frac{1}{8}, \quad p_2 = -8$$

になっている． $\zeta$  が大きくなるにつれて，ピークの低いならかな応答になっている．

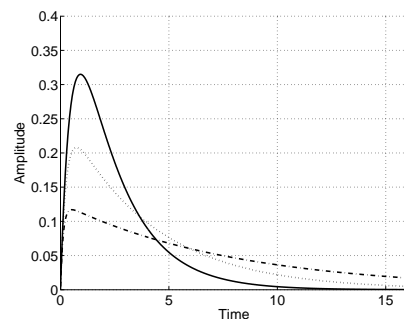


図 8.10：2 次系のインパルス応答（相異なる実数極）

ステップ応答はインパルス応答の積分であり，

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t h(\tau) d\tau \\ &= 1 + \frac{p_2}{(p_1 - p_2)} \exp(p_1 t) - \frac{p_1}{(p_1 - p_2)} \exp(p_2 t). \end{aligned}$$

と計算できる．図 8.11 に  $\omega_n = 1$ ,

$$\zeta = \frac{5}{4}, \quad \zeta = \frac{17}{8}, \quad \zeta = \frac{65}{16}$$

の場合のステップ応答をそれぞれ実線，点線，鎖線で示す． $\zeta$  が大きくなるにつれて鈍い立ち上がりになっている．

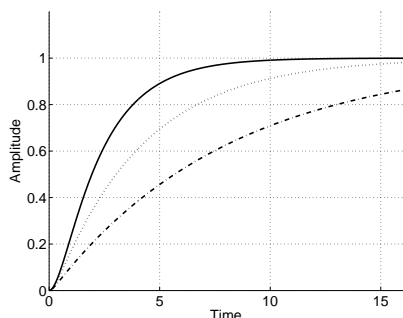


図 8.11：2 次系のステップ応答（相異なる実数極）

5.4.1 節での水タンクモデルは，物理的なパラメータが正值をとるとき，負の実数の極をもつ 2 次遅れ系になっている．

この節を締めくくる前に，伝達関数が式 (8.11) では与えられない 2 次系の例を示しておく．5.4.5 節では，薬動力学の分野で用いられる 2 コンパートメントモデルを説明したが，入力項のあるモデルを考える．

モデル式は，薬の保存則，代謝則であり，コンパートメント 1, 2 の薬の変化量に関する式である．また体外より単位時間当たり  $u$  の供給があるものとする（図 8.12 参照）．すると

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -(k_{01} + k_{21})x_1 + k_{12}x_2 + u, \\ \frac{dx_2}{dt} &= k_{21}x_1 - k_{12}x_2. \end{aligned}$$

が成り立っている．

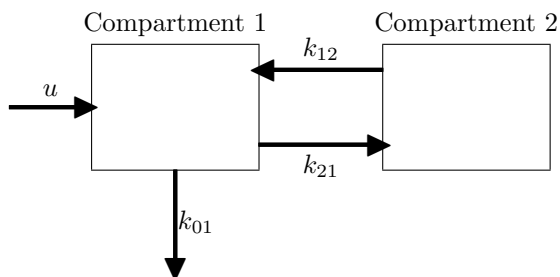


図 8.12：入力のある 2 コンパートメントモデル

初期値 0 としてラプラス変換すれば

$$\begin{aligned} sX_1(s) &= -(k_{01} + k_{21})X_1(s) + k_{12}X_2(s) + U(s), \\ sX_2(s) &= k_{21}X_1(s) - k_{12}X_2(s). \end{aligned}$$

であり， $X_1(s)$ ,  $X_2(s)$  に関する代数方程式

$$\begin{bmatrix} s + k_{01} + k_{21} & -k_{12} \\ -k_{21} & s + k_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U(s) \\ 0 \end{bmatrix}$$

を得る．これを  $X_1(s)$  について解けば

$$X_1(s) = \frac{s + k_{12}}{s^2 + (k_{01} + k_{12} + k_{21})s + k_{01}k_{12}} U(s)$$

となるので，入力からコンパートメント 1 内の物質質量までの伝達関数は

$$H(s) = \frac{s + k_{12}}{s^2 + (k_{01} + k_{12} + k_{21})s + k_{01}k_{12}}$$

である．

パラメータが正のとき， $H(s)$  は相異なる負の極をもつ ( $p_1, p_2$  とおく)．すると

$$H(s) = \frac{p_1 + k_{12}}{p_1 - p_2} \frac{1}{s - p_1} - \frac{p_2 + k_{12}}{p_1 - p_2} \frac{1}{s - p_2}$$

であり，インパルス応答は

$$h(t) = \frac{p_1 + k_{12}}{p_1 - p_2} \exp(p_1 t) - \frac{p_2 + k_{12}}{p_1 - p_2} \exp(p_2 t)$$

となり，ステップ応答は

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t h(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{k_{01}} + \frac{p_1 + k_{12}}{p_1(p_1 - p_2)} \exp(p_1 t) \\ &\quad - \frac{p_2 + k_{12}}{p_2(p_1 - p_2)} \exp(p_2 t) \end{aligned}$$

である．

パラメータを

$$k_{12} = 0.8, \quad k_{01} = 0.4, \quad k_{21} = 1.$$

とすると，伝達関数の極は

$$-2.043, \quad -0.1566$$

であり，インパルス応答は図 8.13 のようになる．これは二つの指数関数の和となっている．実際，出力を対数表示して，時間軸を実数表示すれば，その傾きが途中で変化する様子がわかり，小さな固有値と大きな固有値に対応している（図 8.14 参照）．

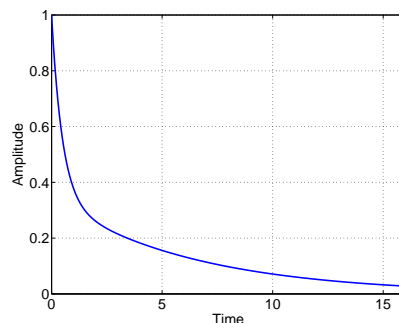


図 8.13：2 コンパートメントモデルのインパルス応答

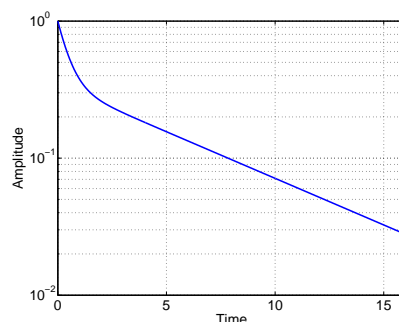


図 8.14：2 コンパートメントモデルのインパルス応答（対数表示）

## 8.4 システムの結合とフィードバック

### 8.4.1 直列結合

1 階線形微分方程式

$$\frac{dy}{dt} + ay = u \quad (8.12)$$

にしたがう変数  $u, y$  があり, さらに変数  $z, y$  は 1 階線形微分方程式

$$\frac{dz}{dt} + bz = y \quad (8.13)$$

を満たしているとする. このとき

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{dz}{dt} + bz \right) + a \left( \frac{dz}{dt} + bz \right) \\ = \frac{d^2z}{dt^2} + (a+b) \frac{dz}{dt} + abz = u \end{aligned}$$

となるので,  $z$  は 2 階線形微分方程式

$$\frac{d^2z}{dt^2} + (a+b) \frac{dz}{dt} + abz = u \quad (8.14)$$

にしたがっているといえる.

ここで式 (8.14) のシステムの伝達関数は

$$H_{zu}(s) = \frac{1}{s^2 + (a+b)s + ab}$$

である. 一方式 (8.12), (8.13) のシステムの伝達関数はそれぞれ

$$H_{yu}(s) = \frac{1}{s+a}, \quad H_{zy}(s) = \frac{1}{s+b}$$

なので

$$H_{zu}(s) = H_{zy}(s)H_{yu}(s)$$

が成り立っていることに注意する.

一般に伝達関数  $H_1(s)$  が入出力  $u_1, y_1$  を, 伝達関数  $H_2(s)$  が入出力  $u_2, y_2$  をもつとき

$$u_2 = y_1$$

という結合をすることを直列結合という. ラプラス変換を用いて書くと

$$\mathcal{L}[y_2](s) = H_2(s)\mathcal{L}[y_1](s)$$

$$\mathcal{L}[y_1](s) = H_1(s)\mathcal{L}[u_1](s)$$

であるから

$$\mathcal{L}[y_2](s) = H_2(s)H_1(s)\mathcal{L}[u_1](s)$$

が成り立ち, 直列結合によって伝達関数は

$$H(s) = H_2(s)H_1(s)$$

と積になることがわかる. このことをブロック線図では図 8.15 のように示す.

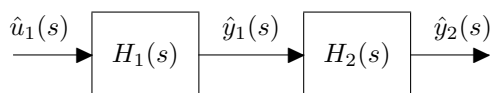


図 8.15: 直列結合

たとえば, 5.4.1 節での水タンクモデルを考える. 平衡点まわりで線形化したのち線形状態方程式は

$$\frac{dx_1}{dt} = -\frac{S_1^2g}{A_1q_i}x_1 + \frac{1}{A_1}u, \quad (8.15)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -\frac{S_2^2g}{A_2q_i}x_2 + \frac{S_1^2g}{A_2q_i}x_1 \quad (8.16)$$

となる. ただし  $x_1$  はタンク 1 の平衡水位からの変化量,  $x_2$  はタンク 2 の平衡水位からの変化量,  $u$  は基準流入量からの変化量を表す. ここで式 (8.15) は入力  $u$ , 出力  $x_1$  の一次のシステム, 式 (8.16) は入力  $x_1$ , 出力  $x_2$  の一次のシステムと考える. すると基準流入量からの変化量  $u$  を入力, タンク 2 の平衡水位からの変化量  $x_2$  を出力して考えるシステムはこれらのシステムの縦続結合で表される.

### 8.4.2 並列結合

伝達関数  $H_1(s)$  が入出力  $u_1, y_1$  を, 伝達関数  $H_2(s)$  が入出力  $u_2, y_2$  をもつとき

$$u = u_1 = u_2, \quad y = y_1 + y_2$$

という結合をすることを並列結合という. ラプラス変換を用いて書くと

$$\mathcal{L}[y_2](s) = H_2(s)\mathcal{L}[y_1](s)$$

$$\mathcal{L}[y_1](s) = H_1(s)\mathcal{L}[u_1](s)$$

であるから

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[y](s) &= \mathcal{L}[y_1](s) + \mathcal{L}[y_2](s) \\ &= H_1(s)\mathcal{L}[u](s) + H_2(s)\mathcal{L}[u](s) \\ &= (H_1(s) + H_2(s))\mathcal{L}[u](s) \end{aligned}$$

を得る. このことは並列結合されたシステムの伝達関数  $H(s)$  が

$$H(s) = H_1(s) + H_2(s)$$

を和をもって表されることがわかる. このことをブロック線図では図 8.16 のように示す.

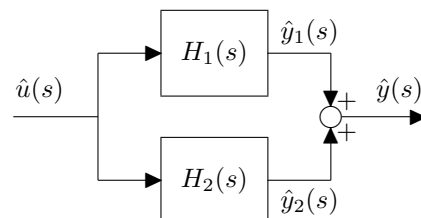


図 8.16: 並列結合

たとえば図 8.17 の RL 回路を考える. インダクタ  $L_1$  と  $L_2$  に流れる電流をそれぞれ  $i_1, i_2$  とすれば,

$$\begin{aligned} L_1 \frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 &= L_2 \frac{di_2}{dt} + R_1 i_2 = E \\ i &= i_1 + i_2 \end{aligned}$$

が成り立っている. 電源電圧  $E$  を入力, 電流  $i$  を出力と考えるとこれは電源電圧  $E$  を入力, 電流  $i_1$  を出

力とするシステムと電源電圧  $E$  を入力、電流  $i_2$  を出力とするシステムの並列結合になっている．実際、これらのシステムの伝達関数は

$$H_1(s) = \frac{1}{L_1s + R_1}, \quad H_2(s) = \frac{1}{L_2s + R_2}$$

であり、 $E$  から  $i$  への伝達関数は

$$H(s) = H_1(s) + H_2(s) = \frac{(L_1 + L_2)s + (R_1 + R_2)}{(L_1s + R_1)(L_2s + R_2)}$$

と計算できる．

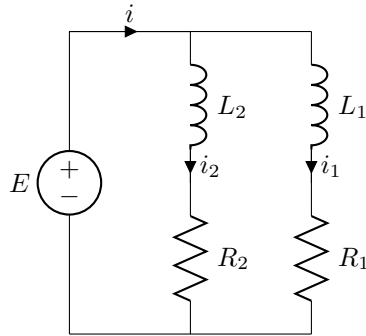


図 8.17 : RL 並列回路

### 8.4.3 フィードバック結合

1 階線形微分方程式

$$\frac{dy}{dt} + ay = u \quad (8.17)$$

$$\frac{dz}{dt} + bz = v \quad (8.18)$$

にしたがう変数  $u, y, v, z$  があり、さらに代数的方程式

$$v = y, \quad u = -z + r \quad (8.19)$$

を満たすものとする．ただし  $r$  はもう一つの変数であり、これを新たな外部入力と考える．

各変数のラプラス変換を考えると式 (8.17), (8.18), (8.19) より

$$(s + a)\mathcal{L}[y](s) = \mathcal{L}[-z + r](s) \\ = -\mathcal{L}[z](s) + \mathcal{L}[r](s),$$

$$(s + b)\mathcal{L}[z](s) = \mathcal{L}[y](s) = \mathcal{L}[y](s)$$

である．これより

$$\mathcal{L}[y](s) = \frac{s + b}{(s + a)(a + b) + 1} \mathcal{L}[r](s)$$

となる．つまりフィードバック結合をしたのちの  $r$  から  $y$  への伝達関数は

$$H(s) = \frac{H_1(s)}{1 + H_2(s)H_1(s)}$$

で与えられる．フィードバック結合はブロック線図では図 8.18 のように表す．

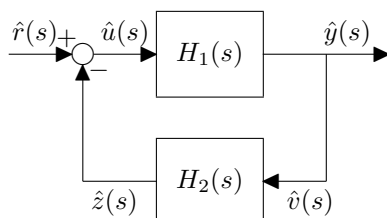


図 8.18 : フィードバック結合

## 8.5 フィードバック結合と安定性

### 8.5.1 フィードバック結合の例

遠心调速器

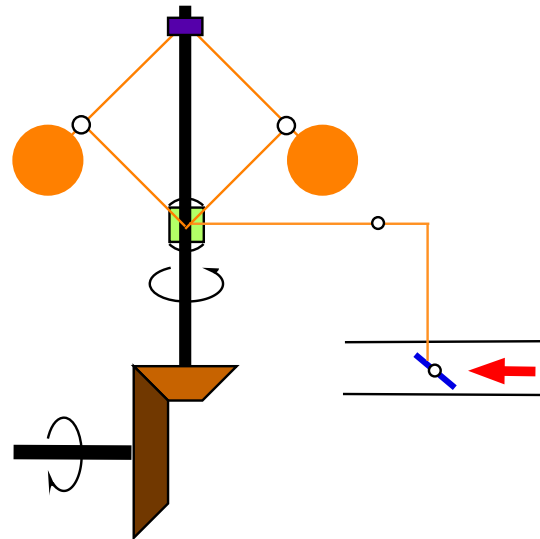


図 8.19 : 遠心调速器

図 8.19 は、遠心调速器とよばれ、蒸気機関の回転数を調整するための機構である．ジェームス・ワットが 1784 年に発明したと言われている．回転軸に取り付けられた錘に働く遠心力を利用して蒸気弁の開閉を行う．回転数が上がれば蒸気弁を閉じ、回転数が下がれば蒸気弁を開くように作られ、蒸気機関の回転数を一定に保つ働きをする．

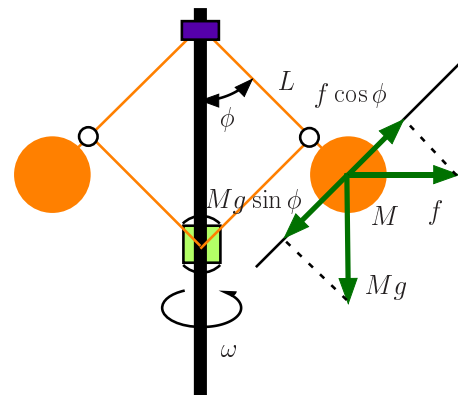


図 8.20 : 遠心调速器の錘に働く力

遠心调速器のモデルを考えてみる．図 8.20 に遠心调速器の錘に働く力を示す．ただし錘の質量  $M$ 、腕木の長さ  $L$ 、回転軸の回転角速度  $\omega$ 、腕木の開き角  $\phi$ 、遠心力  $f$  とする．錘に働く力は重力と遠心力であり、腕木の開き角を変化させる方向の力の成分はそれぞれ  $Mg \sin \phi$ 、 $f \cos \phi$  である．ここで遠心力は  $f = ML\omega^2 \sin \phi$  である．また腕木の角度変化に伴い、摩擦等考慮して  $(d\phi/dt)$  に比例した力が加わるものと仮定すると錘の運動は

$$ML \frac{d^2 \phi}{dt^2} = f \cos \phi - Mg \sin \phi - MLc \frac{d\phi}{dt} \\ = ML\omega^2 \sin \phi \cos \phi - Mg \sin \phi - MLc \frac{d\phi}{dt} \quad (8.20)$$

で記述される．ただし  $c$  は正の定数であるとする．式 (8.20) より

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + c\frac{d\phi}{dt} = \omega^2 \sin\phi \cos\phi - \frac{g}{L} \sin\phi \quad (8.21)$$

である．调速器の回転軸は歯車を介して蒸気機関の回転軸につながっておりその歯数比は  $1:n$  であるとする．蒸気機関の回転軸周りの慣性モーメントを  $J$  として回転角速度を  $\omega_s$  とする．蒸気機関回転軸周りのトルクを  $T$  とする．すると

$$n\omega_s = \omega, \quad (8.22)$$

$$J\frac{d\omega_s}{dt} = T \quad (8.23)$$

が成り立っている．

回転軸が  $\omega_0$  で回転しているとき， $\phi_0$  を

$$\cos\phi_0 = \frac{g}{L\omega_0^2} \quad (8.24)$$

と選ぶと，これが平衡の関係にあることがわかる．式 (8.24) を満たす  $\omega_0, \phi_0$  まわりで非線形微分方程式 (8.21) の線形化を行うと  $\omega = \omega_0 + \Delta\omega, \phi = \phi_0 + \Delta\phi$  として

$$\frac{d^2\Delta\phi}{dt^2} + c\frac{d\Delta\phi}{dt} + \left\{ \frac{g}{L} \cos\phi_0 - \omega_0^2 \cos 2\phi_0 \right\} \Delta\phi = (\omega_0 \sin 2\phi_0) \Delta\omega$$

であり，ここに式 (8.24) より  $\omega_0$  を代入すれば

$$\frac{d^2\Delta\phi}{dt^2} + c\frac{d\Delta\phi}{dt} + \frac{g \sin^2\phi_0}{L \cos\phi_0} \Delta\phi = \frac{2g \sin\phi_0}{L\omega_0} \Delta\omega \quad (8.25)$$

を得る．

図 8.19 に示すように，錘が遠心力によって移動すると，リンクによって蒸気弁が開閉する．そこで蒸気機関の回転軸周りのトルクは

$$T = \tau + k(\cos\phi - \cos\phi_0) \quad (8.26)$$

とある定数  $k > 0$  を用いて表されるものとする．回転数  $\omega = \omega_0$  で一定となるとき， $\phi = \phi_0, \tau = 0$  がつりあいを与えることになる．そこで式 (8.22), (8.23), (8.26) から平衡点周りで線形化した式を書くと

$$\frac{d\Delta\omega}{dt} = \frac{n}{J} \{ \tau - k \sin\phi_0 \Delta\phi \} \quad (8.27)$$

を得る．

式 (8.25) において  $\Delta\omega$  から  $\Delta\phi$  までの伝達関数を  $H_\phi(s)$ ，式 (8.27) において  $\tau - k \sin\phi_0 \Delta\phi$  から  $\Delta\omega$  までの伝達関数を  $H_\omega(s)$  とする．具体的には

$$H_\phi(s) = \frac{\frac{2g \sin\phi_0}{L\omega_0}}{s^2 + cs + \frac{g \sin^2\phi_0}{L \cos\phi_0}},$$

$$H_\omega(s) = \frac{n}{Js}$$

である．ここで

$$K = k \sin\phi_0$$

とすれば，線形化された遠心调速器は図 8.21 のようにフィードバックを含むブロック線図で表現されることになる．

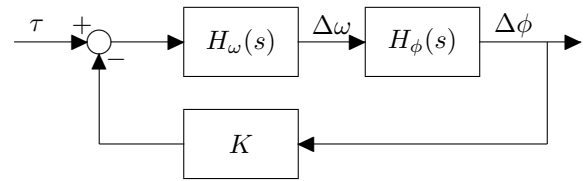


図 8.21：遠心调速器のブロック線図

ここで信号  $\tau$  から  $\Delta\omega$  までの伝達関数を求めると

$$H(s) = \frac{H_\omega(s)}{1 + KH_\phi(s)H_\omega(s)} = \frac{\frac{n}{J} \left( s^2 + cs + \frac{g \sin^2\phi_0}{L \cos\phi_0} \right)}{s^3 + cs^2 + \frac{g \sin^2\phi_0}{L \cos\phi_0} s + \frac{2ngk \sin^2\phi_0}{JL\omega_0}}$$

を得る．

**負帰還増幅器** 1876 年にベルによって電話が発明されて以来，急速に進展してきた通信は，遠距離通信の時代を迎える．1885 年にはニューヨーク，フィラデルフィア間の通信が行われ，1915 年には大陸横断の商用通信が開始した．1927 年にはニューヨーク，ロンドン間の商用通信が始まっている．

このような背景のもとで，信号を増幅する増幅器の革新が必要となり，1927 年ブラックによる負帰還増幅器の発明に至ることになる．フィードバック結合を利用した高性能の増幅器が開発され，実用上大きな意味をもった．

## 8.5.2 フィードバック系の安定性

遠心调速器は蒸気機関の回転数制御機構として広く用いられていたが，しばしばハンチングといわれる振動現象を起こして，回転数を一定に保てないという事態が起こるようになった．これは遠心调速器が不適切に作られている場合に起こる．また負帰還増幅器についても不適切なゲイン設定は，発振などの不安定現象を起こす原因となった．このようにフィードバック結合は，不安定なシステムを作ることになる可能性があるため注意が肝要である．

たとえば

$$H_\omega(s) = \frac{1}{100s}, \quad K = 100$$

とすると

$$H_{\phi,1}(s) = \frac{20}{s^2 + 0.5s + 60},$$

$$H_{\phi,2}(s) = \frac{20}{s^2 + 0.1s + 60}$$

を考える．図 8.21 のフィードバック結合を考えるとき  $\tau$  から  $\Delta\omega$  への伝達関数は， $H_{\phi,1}(s)$  を用いるとき

$$\frac{s^2 + 0.5s + 60}{100s^3 + 50s^2 + 6000s + 2000} \quad (8.28)$$

$$= \frac{0.01(s^2 + 0.5s + 60)}{(s + 0.3336)(s^2 + 0.1664s + 59.94)}$$

となり，これは極を

$$-0.0832 + 7.7419j, \quad -0.0832 - 7.7419j, \quad -0.3336$$



にもつ．実部はすべて負であることに注意する．ステップ応答をとると図 8.22 のようになり，定常値に近づくことがわかる．

一方  $H_{\phi,2}(s)$  を用いるとき  $\tau$  から  $\Delta\omega$  への伝達関数は，

$$\frac{s^2 + 0.1s + 60}{100s^3 + 10s^2 + 6000s + 2000} \quad (8.29)$$

$$= \frac{0.01(s^2 + 0.1s + 60)}{(s + 0.3329)(s^2 - 0.2329s + 60.08)}$$

となり，これは極を

$$0.1165 + 7.7501j, \quad 0.1165 - 7.7501j, \quad -0.3329$$

にもつ．実部が正の極を有していることに注意する．ステップ応答をとると図 8.23 のようになり，定常値に一旦近づくが，次第に振動的な応答が現れてくることになる．

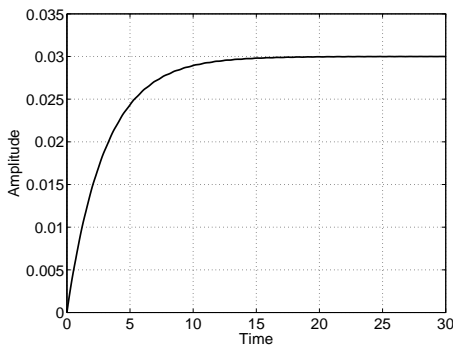


図 8.22：伝達関数 (8.28) のステップ応答

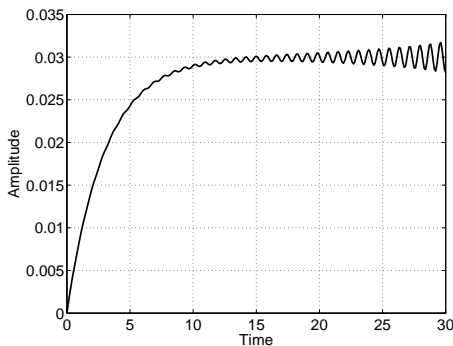


図 8.23：伝達関数 (8.29) のステップ応答

### 練習問題

- 【1】 次の微分方程式で記述されるシステムの伝達関数，インパルス応答を求めよ．さらに入力  $u$  から出力  $y$  への特性が等しくなる状態方程式を求めよ．

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 3y = 2\frac{du}{dt} + u$$

- 【2】 次の状態方程式で記述されるシステムについて，入力から出力への伝達関数およびインパルス応答を求めよ．

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} x$$

- 【3】 図 8.24 のブロック線図で表される接続された系を考える．各伝達関数を

$$H_1(s) = \frac{1}{s+1}, \quad H_2(s) = \frac{4s+1}{2s+1}, \quad H_3(s) = \frac{1}{s+2}$$

とすると，信号  $\hat{r}$  から信号  $\hat{y}$  への伝達関数を求めよ．

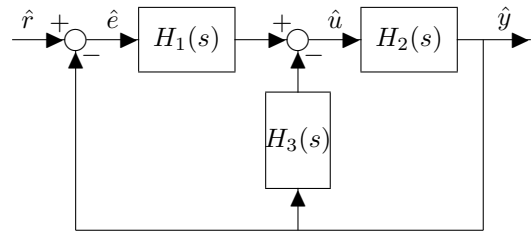


図 8.24：接続された系