数理工学専攻　太田快人

9　離散時間システム（1）

時間軸が連続的ではなく，整数値をとるとき，信号は系列となる．このような離散的な時間軸をもつ信号によって定まっているシステムを離散時間システムという．たとえばディジタル制御系においては，サンプル周期ごとの演算を行うという意味で離散時間システムとしての取り扱いが必要となる部分がある．ディジタル信号処理で用いられるディジタルフィルタは，離散的な時計にしたがって時間が進行する離散時間系である．またモデル化にあたって，時間軸を整数値にとることが自然な系もある．

本章ではこのような離散時間システムの表現方法として，まず線形差分方程式，線形離散時間状態方程式を与える．次に離散時間信号を変換する方法として z 変換を与える．これは連続時間信号に対するラプラス変換に相当するものである．

9.1　線形差分方程式

9.1.1　線形差分方程式を用いたモデル化の例

線形差分方程式でモデル化できるシステムの例としてディジタルフィルタを取り上げることにする．図 9.1 に，その構成を表す．全体は，サンプル周期ごとに動くことになる．レジスタは，はいってきた信号を次のサンプル時刻に出力信号とする仕組みである．丸印で囲むのは，定数ゲインであり，はいってきた信号をゲイン倍する．加算器は，はいってきた信号を加え合わせる（符号が ++ であるとき）．加算器の隅に負号がある場合には，その信号を −1 倍して加えわせることを意味する．

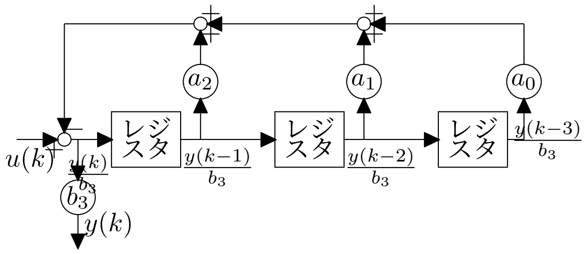

図 9.1：ディジタルフィルタ

図 9.1 のディジタルフィルタの挙動は，線形差分方程式で記述できることを示す．そのためにまず，図 9.2 の場合の挙動を考えることにする．$b_0 \neq 0$ のときには，一番左の加算器に注目すると

$$\frac{y(k+3)}{b_0} = -a_2\frac{y(k+2)}{b_0} - a_1\frac{y(k+1)}{b_0} - a_0\frac{y(k)}{b_0} + u(k)$$

が成り立っている．これは信号 y, u は線形差分方程式

$$y(k+3) + a_2 y(k+2) + a_1 y(k+1) + a_0 y(k) = b_0 u(k) \tag{9.1}$$

を満たしていることを示している．

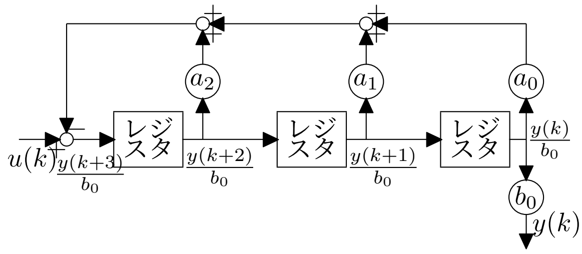

図 9.2：ディジタルフィルタの解析 (1)

次に図 9.3 の場合の挙動を考えることにする．$b_1 \neq 0$ のときには，このときも一番左の加算器に注目すると

$$\frac{y(k+2)}{b_1} = -a_2\frac{y(k+1)}{b_1} - a_1\frac{y(k)}{b_1} - a_0\frac{y(k-1)}{b_1} + u(k)$$

が成り立っている．これは信号 y, u は線形差分方程式

$$y(k+3) + a_2 y(k+2) + a_1 y(k+1) + a_0 y(k) = b_1 u(k+1) \tag{9.2}$$

を満たしていることを示している．

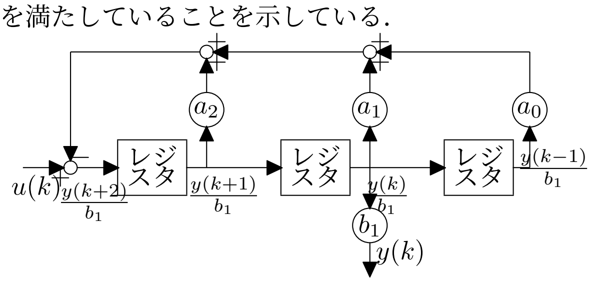

図 9.3：ディジタルフィルタの解析 (2)

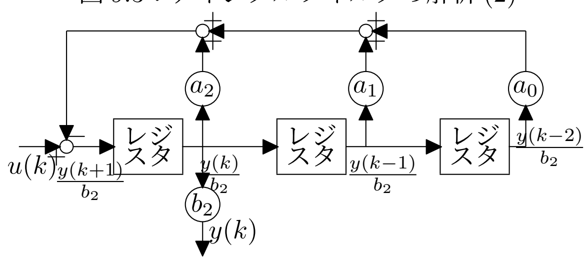

図 9.4：ディジタルフィルタの解析 (3)

さらに図 9.4 の場合の挙動を考えることにする．$b_2 \neq 0$ のときには，一番左の加算器に注目して

$$\frac{y(k+1)}{b_2} = -a_2\frac{y(k)}{b_2} - a_1\frac{y(k-1)}{b_2} - a_0\frac{y(k-2)}{b_2} + u(k)$$

を得る．これは信号 y, u は線形差分方程式

$$y(k+3) + a_2 y(k+2) + a_1 y(k+1) + a_0 y(k) = b_2 u(k+2) \tag{9.3}$$

を満たしていることを示している．

そして図 9.5 の場合の挙動を考えることにする．$b_3 \neq 0$ のときには，一番左の加算器に注目して

$$\frac{y(k)}{b_3} = -a_2\frac{y(k-1)}{b_3} - a_1\frac{y(k-2)}{b_3} - a_0\frac{y(k-3)}{b_3} + u(k)$$

を得る．これは信号 y, u は線形差分方程式

$$y(k+3) + a_2 y(k+2) + a_1 y(k+1) + a_0 y(k) = b_3 u(k+3) \tag{9.4}$$

を満たしていることを示している．

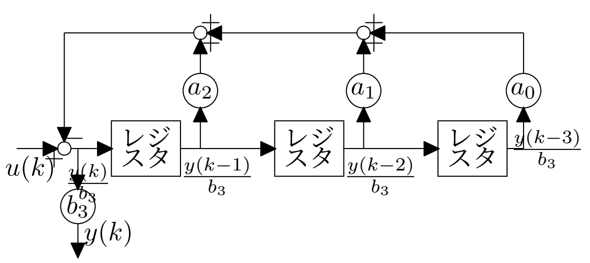

図 9.5：ディジタルフィルタの解析 (4)

以上の式 (9.1)– (9.4) の計算結果に，重ね合わせの理を適用すると，図 9.1 の信号 y, u は線形差分方程式

$$
\begin{aligned}
&y(k+3)+a_2y(k+2)+a_1y(k+1)+a_0y(k)\\
&=b_3u(k+3)+b_2u(k+2)+b_1u(k+1)+b_0u(k)
\end{aligned}
\tag{9.5}
$$

を満たしていることがわかる．

9.1.2　1 次系

差分方程式

$$y(k+1)-ay(k)=0 \tag{9.6}$$

を考える．ただし a は定数である．初期条件 $y(0)=y_0$ を満たす解は

$$y(k)=a^ky(0) \tag{9.7}$$

である．

次に外部入力 u をもった差分方程式

$$y(k+1)-ay(k)=u(k) \tag{9.8}$$

を考える．初期条件 $y(0)=y_0$ を満たす解を考えるために，式 (9.8) を $k=0$ から順に解いていけば，

$$
\begin{aligned}
y(1)&=ay_0+u(0)\\
y(2)&=ay(1)+u(1)\\
&=a^2y_0+au(0)+u(1)\\
y(3)&=ay(2)+u(2)\\
&=a^3y_0+a^2u(0)+au(1)+u(2)
\end{aligned}
$$

であり，ここから

$$y(k)=a^ky_0+a^{k-1}u(0)+\cdots+au(k-2)+u(k-1) \tag{9.9}$$

である．式 (9.9) の右辺第 1 項は，入力のない差分方程式 (9.6) の解 (9.7) と同じであり，初期値応答の項である．第 2 項以下は，外部入力の影響を与える部分であり，系列 $\left(1,a,a^2,\ldots\right)$ と外部入力 u とのたたみ込み和の形をしている．たとえば，$u(k)=b^k$ と指数関数で与えられるときには，$a\neq b$ であれば

$$a^{k-1}b^0+\cdots+ab^{k-2}+b^{k-1}=\frac{a^k-b^k}{a-b}$$

であるから式 (9.9) は

$$y(k)=a^ky_0+\frac{a^k-b^k}{a-b} \tag{9.10}$$

となる．

9.1.3　2 次系

差分方程式の階数をあげて

$$y(k+2)-(a+b)y(k+1)+aby(k)=0 \tag{9.11}$$

を考える．ここで a,b は定数であり，簡単のために $a\neq b$ であるとする．ここで

$$w(k)=y(k+1)-ay(k) \tag{9.12}$$

とおくと

$$
\begin{aligned}
&w(k+1)-bw(k)\\
&=y(k+2)-ay(k+1)-b\left(y(k+1)-ay(k)\right)\\
&=y(k+2)-(a+b)y(k+1)+aby(k)=0
\end{aligned}
$$

である．

解 (9.7) と同様にして

$$w(k)=b^kw(0)$$

である．これを式 (9.12) に代入して解 (9.10) と同様に考えると $w(0)=y(1)-ay(0)$ に注意して

$$
\begin{aligned}
y(k)&=a^ky(0)+\frac{a^k-b^k}{a-b}w(0) \qquad (9.13)\\
&=\frac{a^k-b^k}{a-b}y(1)-\frac{ab(a^{k-1}-b^{k-1})}{a-b}y(0)
\end{aligned}
$$

を得る．

式 (9.11) も式 (9.8) と同様に外部入力をもつときを考えることができるが，解を求めること自体は 9.3 節に譲ることにする．本節では，線形差分方程式モデルを紹介するにとどめる．

9.2　離散時間線形状態方程式

式 (9.11) は，変数

$$x(k)=\begin{bmatrix}y(k+1)\\y(k)\end{bmatrix}$$

を考えると，行列 A を

$$A=\begin{bmatrix}a+b&-ab\\1&0\end{bmatrix} \tag{9.14}$$

と定めるならば

$$x(k+1)=Ax(k) \tag{9.15}$$

が成り立っている．式 (9.15) の解は

$$x(k)=A^kx(0) \tag{9.16}$$

であるから，行列 A のべき乗を計算できれば求めることができる．

式 (9.14) の行列 A の固有値と固有ベクトルを求める．

$$
\begin{aligned}
\det\left(\lambda I-A\right)&=\det\begin{bmatrix}\lambda-(a+b)&ab\\-1&\lambda\end{bmatrix}\\
&=\lambda^2-(a+b)\lambda+ab\\
&=\left(\lambda-a\right)\left(\lambda-b\right)
\end{aligned}
$$

より，固有値は a, b である．対応する固有ベクトルを求めると

$$\begin{bmatrix} a-(a+b) & ab \\ -1 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ 1 \end{bmatrix} = 0,$$
$$\begin{bmatrix} b-(a+b) & ab \\ -1 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

である．ここで正則行列 M を固有ベクトルをならべて

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

と定めると，

$$M^{-1}AM = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

である．したがって

$$A^k = \left\{ M \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} M^{-1} \right\}^k = M \begin{bmatrix} a^k & 0 \\ 0 & b^k \end{bmatrix} M^{-1}$$

が成り立つ．これを式 (9.16) に代入すれば，

$$\begin{aligned} x(k) &= \frac{1}{a-b} \begin{bmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^k & 0 \\ 0 & b^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -b \\ -1 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(1) \\ y(0) \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{a-b} \begin{bmatrix} a^{k+1}-b^{k+1} & ab^{k+1}-a^{k+1}b \\ a^k-b^k & ab^k-a^kb \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(1) \\ y(0) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{a^{k+1}-b^{k+1}}{a-b} y(1) + \frac{ab^{k+1}-a^{k+1}b}{a-b} y(0) \\ \frac{a^k-b^k}{a-b} y(1) + \frac{ab^k-a^kb}{a-b} y(0) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

を得る．当然ながらこれは式 (9.13) と同じである．

式 (9.15) では外部入力がない場合を扱ったが，次に

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \tag{9.17}$$

を考える．初期条件 $x(0)$ が与えられたとき，式 (9.17) の解は，式 (9.8) から式 (9.9) を導いたのと同様にして

$$\begin{aligned} x(k) = A^k x(0) &+ A^{k-1}Bu(0) \\ &+ \cdots + ABu(k-2) + Bu(k-1) \end{aligned}$$

であることがわかる．右辺第 1 項は初期値応答の部分，第 2 項以下は入力とのたたみ込み和の部分になっている．

9.3　z 変換

7 章では，連続時間信号を複素平面（の一部）で定義された関数に変換するラプラス変換について述べた．ラプラス変換のもっている性質は，線形微分方程式によって記述されるシステムを扱うのに都合がよいものであった．本節では，離散時間信号について同様のことができる z 変換について述べる．

9.3.1　z 変換の定義

非負の整数を時間軸にもつ時間関数 f があるときに，その z 変換を

$$\mathcal{Z}[f](z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k} \tag{9.18}$$

と定める [1]．ただし複素数 z は式 (9.18) での級数が収束する領域にとる（関数 f ごとに異なる）．

式 (9.18) では，変換する関数が f であることを強調するために z 変換の記号として $\mathcal{Z}[f]$ を用いている．簡略して書くときには，時間領域の信号 f に対して大文字 F や $\hat{f}$ などの記号を用いることもある．

例 9.1　関数 $f(k) = 1,\ k \geq 0$ を考える（図 9.6 参照）．その z 変換を計算すると

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[f](z) &= \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} \\ &= \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}, \quad |z| > 1 \end{aligned}$$

を得る．

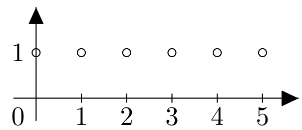

図 9.6：離散時間階段関数

例 9.2　関数 $f(k) = a^k,\ k \geq 0$ を考える（図 9.7 参照）．その z 変換を計算すると

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[f](z) &= \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k} \\ &= \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}, \quad |z| > |a| \end{aligned}$$

を得る．

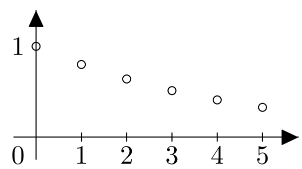

図 9.7：離散時間指数関数

例 9.3　関数 f は $f(0) = 1,\ f(k) = 1,\ k > 0$ を満たすものとする（図 9.8 参照）．その z 変換を計算すると

$$\mathcal{Z}[f](z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k} = 1$$

を得る．これはすべての z に対して成り立っている．

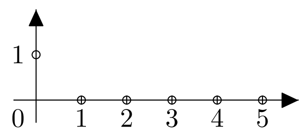

図 9.8：離散時間単位インパルス関数

[1] 信号処理では時間軸を負の整数を含めた整数全体として z 変換を考えるときがある．制御では時間軸を非負にとる z 変換を用いることが一般的である．

9.3.2 z 変換の基本性質

9.3.1 節で定義した z 変換に関する基本的な性質をまとめておく．

性質 9.1 z 変換は線形性をもつ．つまり時間関数 f, g の和 $h = f + g$ を $h(k) = f(k) + g(k)$ とするとき

$$\mathcal{Z}[f+g] = \mathcal{Z}[f] + \mathcal{Z}[g] \tag{9.19}$$

が成り立ち，時間関数 f のスカラー倍 $g = cf$ を $g(k) = cf(k)$ とするとき

$$\mathcal{Z}[cf] = c\mathcal{Z}[f]. \tag{9.20}$$

が成り立つ．

式 (9.19) については，

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}[h](z) &= \sum_{k=0}^{\infty} h(k) z^{-k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (f(k) + g(k)) z^{-k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} g(k) z^{-k} \\
&= \mathcal{Z}[f](z) + \mathcal{Z}[g](z)
\end{aligned}$$

により導かれる．式 (9.20) については，

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}[g](z) &= \sum_{k=0}^{\infty} g(k) z^{-k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} cf(k) z^{-k} \\
&= c\sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k} \\
&= c\mathcal{Z}[f](z)
\end{aligned}$$

から示すことができる．

離散時間信号 $f,\ g$ のたたみ込みについて考える．$h = f * g$ を

$$h(k) = \sum_{\tau=0}^{k} f(k-\tau) g(\tau) \tag{9.21}$$

と定めて，たたみ込みという．たたみ込みが $f * g = g * f$, $(f+g) * h = f * h + g * h$ などを満たすことは容易に示せるので，各自確かめられたい．

性質 9.2 関数 $f,\ g$ のたたみ込み $h = f * g$ について

$$\mathcal{Z}[h] = \mathcal{Z}[f]\, \mathcal{Z}[g] \tag{9.22}$$

が成り立つ．

式 (9.22) については，

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}[h](z) &= \sum_{k=0}^{\infty} h(k) z^{-k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\tau=0}^{k} f(k-\tau) g(\tau) z^{-k} \\
&= \sum_{\tau=0}^{\infty} \sum_{k=\tau}^{\infty} f(k-\tau) z^{-(k-\tau)} g(\tau) z^{-\tau} \\
&= \mathcal{Z}[f](z) \mathcal{Z}[g](z)
\end{aligned}$$

によって示すことができる．

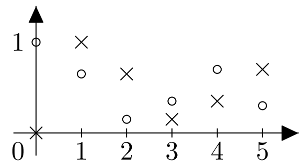

図 9.9：離散時間関数の単位遅れ

性質 9.3 離散時間関数の時間軸移動（単位遅れ）

$$g(0) = 0, \quad g(k) = f(k-1),\ k > 0$$

を考える（図 9.9 参照，$\circ$ が f, $\times$ が g を表す）．このとき

$$\mathcal{Z}[g](z) = z^{-1}\mathcal{Z}[f](z) \tag{9.23}$$

が成り立つ．

実際，定義に基づいて計算すれば

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}[g](z) &= \sum_{k=0}^{\infty} g(k) z^{-k} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} f(k-1) z^{-(k-1)} z^{-1} \\
&= z^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k} = z^{-1}\mathcal{Z}[f](z)
\end{aligned}$$

である．

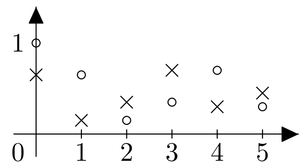

図 9.10：離散時間関数の左シフト

性質 9.3 では，離散時間信号を 1 単位時間遅らせた（右にシフトした）が，逆に左にシフトすると次の性質を得る．

性質 9.4 離散時間関数の時間軸移動（左シフト）

$$g(k) = f(k+1),\ k > 0$$

を考える（図 9.10 参照，$\circ$ が f, $\times$ が g を表す）．このとき

$$\mathcal{Z}[g](z) = z\mathcal{Z}[f](z) - zf(0) \tag{9.24}$$

が成り立つ．

これは z 変換の定義より

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}[g](z) &= \sum_{k=0}^{\infty} g(k) z^{-k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} f(k+1) z^{-(k+1)} z \\
&= z\sum_{k=1}^{\infty} f(k) z^{-k} \\
&= z\sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k} - zf(0)
\end{aligned}$$

である．

注意 9.1　性質 9.4 を繰り返し適用することによって，正整数 m に対して

$$g(k) = f(k+m), \quad k \geq 0$$

て定義される離散時間関数は

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}[g](z) = z^m \mathcal{Z}[f](z) - z^m f(0) \\ - z^{m-1} f(1) - \cdots - z f(m-1)\end{aligned} \tag{9.25}$$

を満たすことがわかる．

性質 9.5　定数 $a \neq 0$ として，離散時間信号 f に対して g を

$$g(k) = f(k) a^k, \quad k \geq 0$$

と定める．このとき

$$\mathcal{Z}[g](z) = \mathcal{Z}[f]\left(\frac{z}{a}\right)$$

が成り立つ．

定義より

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}[g](z) &= \sum_{k=0}^{\infty} g(k) z^{-k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} f(k) a^k z^{-k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} f(k) \left(\frac{z}{a}\right)^{-k} \\ &= \mathcal{Z}[f]\left(\frac{z}{a}\right)\end{aligned}$$

であることがわかる．

9.3.3　基本性質の適用例

9.3.2 節での基本性質を利用して，いくつかの重要な離散時間関数の z 変換をもとめてみる．

例 9.4　余弦関数 $f(k) = \cos \omega k$ と正弦関数 $g(k) = \sin \omega k$ について

$$\mathcal{Z}[f](z) = \frac{z^2 - z\cos\omega}{z^2 - 2z\cos\omega + 1} \tag{9.26}$$

$$\mathcal{Z}[g](z) = \frac{z\sin\omega}{z^2 - 2z\cos\omega + 1} \tag{9.27}$$

が成り立つ．

複素数の指数関数を用いて

$$\begin{aligned}f(k) &= \frac{e^{j\omega k}}{2} + \frac{e^{-j\omega k}}{2}, \\ g(k) &= \frac{e^{j\omega k}}{2j} - \frac{e^{-j\omega k}}{2j}\end{aligned}$$

であるから例 9.2 と性質 9.1 を用いると

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}[f](z) &= \frac{1}{2}\frac{z}{z - e^{j\omega}} + \frac{1}{2}\frac{z}{z - e^{-j\omega}} \\ &= \frac{z(z - e^{-j\omega}) + z(z - e^{j\omega})}{2(z - e^{j\omega})(z - e^{-j\omega})} \\ &= \frac{z^2 - z\cos\omega}{z^2 - 2z\cos\omega + 1}\end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}[g](z) &= \frac{1}{2j}\frac{z}{z - e^{j\omega}} - \frac{1}{2j}\frac{z}{z - e^{-j\omega}} \\ &= \frac{z(z - e^{-j\omega}) - z(z - e^{j\omega})}{2j(z - e^{j\omega})(z - e^{-j\omega})} \\ &= \frac{z\sin\omega}{z^2 - 2z\cos\omega + 1}\end{aligned}$$

であることがわかる．

例 9.5　非負整数 m に対して

$$f_m(k) = k(k-1)\cdots(k-m+1)$$

と定める．ただし f_0 は例 9.1 で考えた離散時間単位階段関数であるとする．このとき

$$\mathcal{Z}[f_m](z) = \frac{m! z^{-m}}{(1 - z^{-1})^{m+1}} = \frac{m! z}{(z-1)^{m+1}} \tag{9.28}$$

である．

性質 9.3 にあるように $g_m(0) = 0$, $g_m(k) = f_m(k-1), k > 0$ と定める．すると $\mathcal{Z}[g_m](z) = z^{-1}\mathcal{Z}[f_m](z)$ であり，$m \geq 1$ に対して

$$\begin{aligned}&f_m(k) - g_m(k) \\ &= \{k - (k-m)\}(k-1)\cdots(k-m+1) \\ &= m f_{m-1}(k-1), \quad k > 0\end{aligned} \tag{9.29}$$

であることに注意する．ここで $f_m(0) - g_m(0) = 0$ であるので，$f_{m-1}(-1) = 0$ と形式的に定めれば，式 (9.29) は $k = 0$ でも正しい．z 変換を考えると

$$\mathcal{Z}[f_m](z) = \frac{m\mathcal{Z}[f_{m-1}](z)}{(1 - z^{-1})} \tag{9.30}$$

を得る．ここで例 9.1 より

$$\mathcal{Z}[f_0](z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

であるから，式 (9.30) を適用すると式 (9.28) を得る．

例 9.5 を具体的に記述すると

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}[f_1](z) &= \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} = \frac{z}{(z-1)^2}, \\ \mathcal{Z}[f_2](z) &= \frac{2z^{-2}}{(1 - z^{-1})^3} = \frac{2z}{(z-1)^3}, \\ \mathcal{Z}[f_3](z) &= \frac{6z^{-3}}{(1 - z^{-1})^4} = \frac{6z}{(z-1)^4}\end{aligned}$$

である．また

$$\begin{aligned}&f_1(k) = k, \\ &f_2(k) = k(k-1) = k^2 - k, \\ &f_3(k) = k(k-1)(k-2) = k^3 - 3k^2 + 2k\end{aligned}$$

である．これから $p_1(k)=k,\ p_2(k)=k^2,\ p_3(k)=k^3$ と単項式を考えると

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Z}[p_1](z) &= \mathcal{Z}[f_1](z) = \frac{z}{(z-1)^2},\\
\mathcal{Z}[p_2](z) &= \mathcal{Z}[f_2](z) + \mathcal{Z}[p_1](z)\\
&= \frac{2z}{(z-1)^3} + \frac{z}{(z-1)^2} = \frac{z^2+z}{(z-1)^3},\\
\mathcal{Z}[p_3](z) &= \mathcal{Z}[f_3](z) + 3\mathcal{Z}[p_2](z) - 2\mathcal{Z}[p_1](z)\\
&= \frac{6z}{(z-1)^4} + \frac{3z^2+3z}{(z-1)^3} - \frac{2z}{(z-1)^2}\\
&= \frac{5z^3-4z^2+5z}{(z-1)^4}
\end{aligned}
$$

を得る．

9.3.4 逆 z 変換

まずこれまでに得られた基本的な離散時間関数の z 変換を表にまとめておく．表 9.1 に表れる z 変換はすべて有理関数になっている．

逆に複素数 z の有理関数 $F(z)$ が与えられたとする．このときに $\mathcal{Z}[f](z)=F(z)$ となる離散時間関数 $f(k)$ を求めたい．有理関数は，分母多項式と分子多項式の比に記述したとき，分子多項式の次数が分母多項式の次数を上回らないときプロパーというのであった．プロパーな有理関数の分母多項式と分子多項式のそれぞれの次数の差を相対次数という．

表 9.1：z 変換

$f(k)$	$\mathcal{Z}[f](z)$
単位インパルス関数	1
単位階段関数	$\frac{z}{z-1}$
a^k	$\frac{z}{z-a}$
$\cos\omega k$	$\frac{z^2-z\cos\omega}{z^2-2z\cos\omega+1}$
$\sin\omega k$	$\frac{z\sin\omega}{z^2-2z\cos\omega+1}$
k	$\frac{z}{(z-1)^2}$
ka^k	$\frac{az}{(z-a)^2}$

まずプロパーな有理関数 $F(z)$ が $z=0$ に極をもたず，さらに $F(0)=0$ を満たす（この場合 $F(z)$ は $z=0$ に零をもつという）場合を考える．$F(z)$ の極を $p_1,\cdots,p_m$ とし，それらは相異なるものとする（重複する極に対する方法はやや複雑になるので本講義では省略する）．このときには，

$$
F(z) = \frac{c_1 z}{z-p_1} + \frac{c_2 z}{z-p_2} + \cdots + \frac{c_m z}{z-p_m}
$$

と各極ごとに 1 次の有理関数になるように展開する．ここで係数は

$$
c_i = \frac{\lim_{z\to p_i}\tilde{F}(z)(z-p_i)}{p_i}
$$

によって定めることができる．$F(z)$ の時間領域関数を求めると，例 9.2 より

$$
f(k) = c_1 p_1^k + \cdots + c_m p_m^k \tag{9.31}
$$

である．

次にプロパーな有理関数 $F(z)$ が $z=0$ に零点をもたないか，または $z=0$ に極（その重複度を q とする）をもつ場合を考える．

$$
F_1(z) = z^{q+1}F(z) \tag{9.32}
$$

と定める．$F(z)$ の相対次数を r とする．まず $r>q$ ならば式 (9.32) の $F_1(z)$ はプロパーであり，$z=0$ に極はなく，$z=0$ に零点をもつので，

$$
F_1(z) = \frac{c_1 z}{z-p_1} + \frac{c_2 z}{z-p_2} + \cdots + \frac{c_m z}{z-p_m}
$$

と展開して，式 (9.31) と同様にして

$$
f_1(k) = c_1 p_1^k + \cdots + c_m p_m^k
$$

となる．$F(z)=z^{-(q+1)}F_1(z)$ なので，性質 9.3 を適用して

$$
f(k) = \begin{cases} 0, & k \le q \\ c_1 p_1^{k-(q+1)} + \cdots + c_m p_m^{k-(q+1)}, & k > q \end{cases} \tag{9.33}
$$

である．

$r \le q$ のときには，式 (9.32) の $F_1(z)$ はプロパーではなく，

$$
F_1(z) = a_{q-r}z^{q+1-r} + \cdots + a_0 z + F_2(z)
$$

となり，$F_2(z)$ はプロパーかつ $z=0$ に極をもたず，零点をもつ．

$$
F_1(z) = \frac{c_1 z}{z-p_1} + \frac{c_2 z}{z-p_2} + \cdots + \frac{c_m z}{z-p_m}
$$

と展開して，式 (9.31) と同様にして

$$
f_2(k) = c_1 p_1^k + \cdots + c_m p_m^k
$$

となる．$F(z) = a_{q-r}z^{-r} + \cdots + a_0 z^{-q} + z^{-q+1}F_2(z)$ なので性質 9.3 を適用して

$$
f(k) = \begin{cases} 0, & 0 \le k < r \\ a_{q-k}, & r \le k \le q \\ f_2(k-(q+1)), & q < k \end{cases} \tag{9.34}
$$

である．

9.3.5 z 変換を用いた線形差分方程式の解法

線形差分方程式 (9.6) を z 変換を用いて解いてみる．$Y(z)=\mathcal{Z}[g](z)$ とすれば，性質 9.4 より

$$
zY(z) - zy_0 - aY(0) = 0
$$

であり，これより

$$
Y(z) = \frac{zy_0}{z-a}
$$

である．この逆 z 変換は

$$
y(k) = a^k y_0
$$

であり，式 (9.7) と一致している．

さらに高階の差分方程式や外部入力が表 9.1 にあるような関数である場合についても性質 9.4 あるいは注意 9.1 より解の z 変換を求めることができる．これを逆 z 変換すれば離散時間関数が求まる．

練習問題

【1】 次の差分方程式の解を z 変換を用いて求めよ.

(i) $y(k+2) - y(k+1) - 2y(k) = 0,$
$y(0) = 1,\ y(1) = 2.$

(ii) $y(k+1) - y(k) = 2^{-k},\ \ y(0) = 2.$