数理工学専攻　太田快人

10　離散時間システム（2）

10.1　伝達関数とインパルス応答

8 章では，連続時間線形微分方程式で与えられるシステムの入力と出力の関係を考察し，ラプラス変換を用いて伝達関数という考え方を導入した．離散時間システムに対しても z 変換を用いて伝達関数という考え方を導入することができる．

10.1.1　伝達関数

外部入力のある差分方程式 (9.8) の解は，式 (9.9) で与えられることがわかっている．ここで第 1 項は，初期値応答なので，$y_0 = 0$ であるときには，残りの項しか表れない．ここで $h(0) = 0, h(k) = a^{k-1}, k \geq 1$ とすれば，第 2 項は外部入力 u と h とのたたみ込み

$$\begin{aligned}(h * u)(k) &= \sum_{\tau=0}^{k} h(k-\tau)u(\tau) \qquad (10.1)\\ &= \sum_{\tau=0}^{k-1} a^{k-1-\tau}u(\tau)\end{aligned}$$

になっている．したがって初期値を 0 とするとき入力と出力の関係は

$$\mathcal{Z}[y](z) = \mathcal{Z}[h](z)\mathcal{Z}[u](z) = \frac{1}{z-a}\mathcal{Z}[u](z) \qquad (10.2)$$

である．つまり入力および出力の z 変換の比は入力に依存せずに一定であり，

$$\mathcal{Z}[h](z) = \frac{1}{z-a} \qquad (10.3)$$

に等しい．式 (10.3) を差分方程式 (9.8) で記述されるシステムの伝達関数という．

一般に差分方程式

$$\begin{aligned}&y(k+n)+a_{n-1}y(k+n-1)+\cdots+a_1y(k+1)+a_0y(k)\\ &= b_mu(k+m)+\cdots+b_1u(k+1)+b_0u(k) \qquad (10.4)\end{aligned}$$

を考える．初期値をすべて 0 であるとして z 変換を考えると

$$\begin{aligned}&\left(z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1z + a_0\right)Y(z)\\ &\qquad = (b_mz^m + \cdots + b_1z + b_0)U(z)\end{aligned}$$

であるから，伝達関数は

$$H(z) = \frac{b_mz^m + \cdots + b_1z + b_0}{z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1z + a_0} \qquad (10.5)$$

となる．このとき

$$Y(z) = H(z)U(z) \qquad (10.6)$$

であることに注意する．

10.1.2　インパルス応答

伝達関数の逆 z 変換をインパルス応答という．たとえば，式 (10.3) の 1 次系の伝達関数の場合，その逆 z 変換 $h(k)$ は

$$h(k) = \begin{cases} 0, & k = 0, \\ a^{k-1}, & k \geq 1 \end{cases} \qquad (10.7)$$

である．

入力が離散時間単位インパルス関数（例 9.3 参照）であるとすれば，その z 変換は 1 であるので，出力はインパルス応答そのものになる．このことはインパルス応答と呼ばれることの意味づけでもある．

一般の入力 u を考えるとき，インパルス応答 h をもつシステムの出力は

$$y(k) = \sum_{\tau=0}^{k} h(k-\tau)u(\tau) \qquad (10.8)$$

とたたみ込みの形で表すことができる．式 (10.1) は 1 次系の場合の具体的な形である．ここで z 変換の性質 9.2 を思い出すと，式 (10.8) は式 (10.6) の時間領域での表現になっていることに気付く．

外部入力 u と出力 y をもつ状態方程式

$$\begin{aligned}x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \qquad (10.9)\\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) \qquad (10.10)\end{aligned}$$

で表されるシステムについて，初期値 $x(0) = 0$ であるときの単位インパルス入力に対する応答を求めてみる．ただし説明を簡単にするために入力数出力数ともに 1 である（つまり B は列ベクトル，C は行ベクトルの場合）とする．このときには

$$\begin{aligned}x(1) &= B\\ x(2) &= Ax(1) = AB\\ x(3) &= Ax(2) = A^2B\\ &\vdots\end{aligned}$$

となるので，

$$\begin{aligned}y(0) &= D\\ y(1) &= CB\\ y(2) &= CAB\\ y(3) &= CA^2B\\ &\vdots\end{aligned}$$

と計算できる．つまりインパルス応答は

$$
\begin{aligned}
h(0) &= D \qquad (10.11)\\
h(1) &= CB\\
h(2) &= CAB\\
h(3) &= CA^2B\\
&\vdots\\
h(k) &= CA^{k-1}B \qquad (10.12)\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

であることがわかる．これらをマルコフパラメータと呼んでいる．

式 (10.9),(10.10) によって定めるシステムの伝達関数はインパルス応答の z 変換を考えて

$$
\begin{aligned}
H(z) &= D + \sum_{k=1}^{\infty} CA^{k-1}Bz^{-k}\\
&= D + z^{-1}C\left(I - z^{-1}A\right)^{-1}B\\
&= D + C\left(zI - A\right)^{-1}B \qquad (10.13)
\end{aligned}
$$

と計算することができる．ただし 1 行めから 2 行めへの変形は以下の事実を用いた．行列 A と複素数 z に対して

$$
\begin{aligned}
&z\left(I - z^{-1}A\right)\sum_{k=1}^{N} A^{k-1}z^{-k} \qquad (10.14)\\
&= \sum_{k=1}^{N} A^{k-1}z^{-(k-1)} - \sum_{k=1}^{N} A^{k}z^{-k}\\
&= I - A^{N}z^{-N}
\end{aligned}
$$

が成り立つが，複素数 z を $|z| > \rho(A)$（$\rho(A)$ は固有値の絶対値の最大値を表す）として選べば Az^{-1} の固有値の絶対値はすべて 1 未満になるので，$N \to \infty$ であるとき $A^{N}z^{-N} \to 0$ である．すると式 (10.14) より

$$
\sum_{k=1}^{\infty} A^{k-1}z^{-k} = z^{-1}\left(I - z^{-1}A\right)^{-1}
$$

であることがわかる．

10.1.3　1 次系の応答

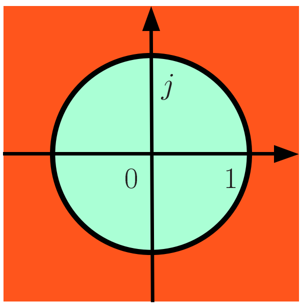

図 10.1：インパルス応答が収束発散する境界

外部入力をもった 1 次系 (9.8) の伝達関数は式 (10.3) で与えたように

$$
H(z) = \frac{1}{z - a}
$$

であり，その逆 z 変換であるインパスル応答は式 (10.7) で与えている．

もし $|a| < 1$ であれば，$k \to \infty$ のときに $h(k) \to 0$ となることがわかる．また $|a|$ が小さいほど，$|h(k)|$ の大きさも速く 0 に収束していくことがわかる．逆に $|a| > 1$ であれば，$k \to \infty$ のときに $|h(k)|$ は発散していくことがわかる．図 10.1 は，インパルス応答が 0 に収束するか発散するかの境界である単位円を示している．$H(z)$ の極が単位円の内側にあるときにインパルス応答は 0 に収束する．

10.1.4　2 次系の応答

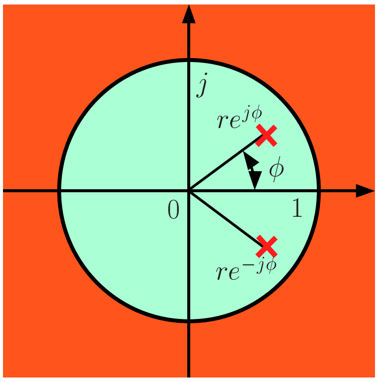

図 10.2：離散時間 2 次系の極

9.1.3 節では，式 (9.11) のように入力のない 2 次系を考えた．ここでは，インパルス応答を考えるために外部入力のあるシステムを対象にするために以下の 2 次系を考える．

$$
y(k+2) - 2r\cos\phi\, y(k+1) + r^2 y(k) = b_0 u(k). \quad (10.15)
$$

ただし $b_0, r > 0$ および $0 < \phi < \pi$ は定数である．式 (10.15) のシステムの伝達関数は

$$
H(z) = \frac{b_0}{z^2 - 2r\cos\phi z + r^2}
$$

である．極は $re^{\pm j\phi}$ にあるので，$0 < \phi < \pi$ のときには，極は相異なる（互いに共役な）複素数となる．r は原点からの距離を表し，ϕ は偏角を与えている（図 10.2 参照）.

$H(z)$ の逆 z 変換を求めると

$$
z^2 H(z) = \frac{e^{j\phi}b_0}{e^{j\phi} - e^{-j\phi}}\frac{z}{z - re^{j\phi}} - \frac{e^{-j\phi}b_0}{e^{j\phi} - e^{-j\phi}}\frac{z}{z - re^{-j\phi}}
$$

であるから，インパルス応答 $h(k)$ は

$$
h(k) = \begin{cases} 0, & k = 0, 1\\ \dfrac{b_0 r^{k-2}\sin(k-1)\phi}{\sin\phi}, & k \geq 2 \end{cases} \qquad (10.16)
$$

である．定数 r はインパルス応答の減衰（$0 < r < 1$ のとき）の速さあるいは増大（$r > 1$ のとき）の速さを決めている．一方 ϕ は振動的挙動の周期を決めており，ϕ が小さいほど周期は長い．

図 10.3 に式 (10.16) のインパルス応答を示す．ただしここでは $b_0 = 1 - 2r\cos(\phi) - r^2$ とおいている（こ

れはインパルス応答の総和が 1 になるように規格化したものである）．$\phi=\pi/20, \pi/12, \pi/8$ の場合をそれぞれ実線，破線，点線で表している．いずれも $r=0.96$ とした．ϕ の値による周期の違いがわかる．

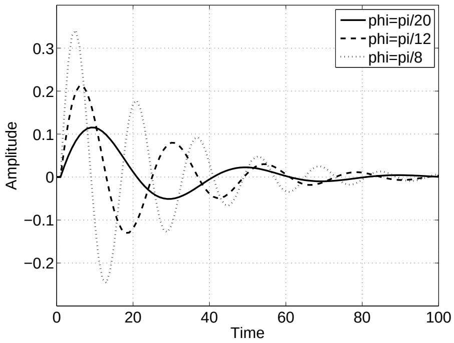

図 10.3：インパルス応答

10.2 連続時間システムとの変換

10.2.1 サンプルホールドを用いた離散化

図??ではディジタル制御系において連続時間信号をもつ制御対象に対して，ホールド回路で離散時間信号を連続時間信号に置き換えて入力を発生し，サンプラで連続時間信号を離散時間信号に置き換えてディジタル演算に送る込む仕組みを説明した．ここで見方を少し変えて，ホールド回路，連続時間系，サンプラが一まとまりになっているとし，それが離散時間系によって動かされていると考える．一まとまりになった部分（図 10.4 参照）は離散時間系として働く．つまり図 10.4 の左端から離散時間信号が入力されたときに右端からも離散時間信号が出力されそれらをそれぞれ z 変換すれば伝達関数を決めることができるのである．

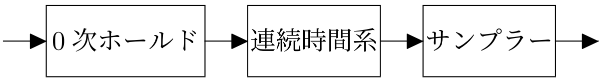

図 10.4：ホールド回路，連続時間系，サンプラからなるシステム

このことをまず 1 次系を例にとって説明する．連続時間系が

$$\frac{dw}{dt}+aw=v \tag{10.17}$$

と記述できるとする．サンプル周期 T で離散化を考えると，入力 v は $kT \le t < (k+1)T$ において 0 次ホールドによって $v(t)=u(k)$ に保たれている．式 (10.17) の初期時刻を $t=kT$ として $t=(k+1)T$ での w の値は

$$\begin{aligned} &w((k+1)T) \\ &= e^{-aT}w(kT)+\int_{kT}^{(k+1)T} e^{-a((k+1)T-\tau)}v(\tau)\,d\tau \\ &= e^{-aT}w(kT)+\frac{\left(1-e^{-aT}\right)}{a}u(k) \end{aligned} \tag{10.18}$$

である．ここで $y(k)=w(kT)$ とサンプルすることにすれば，式 (10.18) は

$$y(k+1)=e^{-aT}y(k)+\frac{\left(1-e^{-aT}\right)}{a}u(k) \tag{10.19}$$

となり，y, u は離散時間の 1 次系にしたがうことがわかる．

なお，式 (10.17) の連続時間系の伝達関数は

$$H(s)=\frac{1}{s+a}$$

であったが，サンプルホールドした式 (10.19) の離散時間系の伝達関数は

$$H_{\mathrm{ho}}(z)=\frac{\left(1-e^{-aT}\right)}{a\left(z-e^{-aT}\right)} \tag{10.20}$$

になっている．

次に一般の場合を考察する．連続時間系の伝達関数が $H(s)$ で与えられているとする．このとき図 10.4 の左から離散時間の単位階段関数を入力したとしよう．0 次ホールドの働きにより連続時間系への入力 $v(t)$ は

$$v(t)=1, \quad 0 \le t$$

となって連続時間の単位階段関数になる．すると連続時間系の出力 w はステップ応答なのでそのラプラス変換は

$$\mathcal{L}\left[w\right](s)=\frac{H(s)}{s} \tag{10.21}$$

となっている．これを $t=kT$ でサンプルしたものが図 10.4 での右端の信号になる．$H(s)/s$ は $H(s)$ のステップ応答にあたりその時間領域の信号を $t=kT$ でサンプルして z 変換したものを $\mathcal{Z}\left(\frac{H(s)}{s}, T\right)(z)$ と書くことにする．入力の z 変換は $(1-z^{-1})^{-1}$ だったので，サンプルホールドした離散時間の伝達関数は

$$H_{\mathrm{ho}}(z)=\left(1-z^{-1}\right)\mathcal{Z}\left(\frac{H(s)}{s}, T\right)(z) \tag{10.22}$$

で与えられる．

実際，1 次系の場合

$$\frac{1}{s(s+a)}=\frac{1}{as}-\frac{1}{a(s+a)}$$

であるから，その時間領域の信号は

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{a}e^{-at}$$

である．すると式 (10.22) は

$$\begin{aligned} &\left(1-z^{-1}\right)\left\{\frac{1}{a\left(1-z^{-1}\right)}-\frac{1}{a\left(1-z^{-1}e^{-aT}\right)}\right\} \\ &\qquad =\frac{1}{a}\left(\frac{z^{-1}\left(1-e^{-aT}\right)}{1-z^{-1}e^{-aT}}\right) \end{aligned}$$

となり，これは式 (10.20) に一致している．また極 $-a$ は e^{-aT} に写されたことにも注意する．一般に式 (10.22) によって連続時間の伝達関数 $H(s)$ を離散時間の伝達関数 $H_{\mathrm{ho}}(z)$ に写すとき，$s=p$ にあった極は e^{-pT} に写されることが示されている．

10.2.2 数値積分法に基づく離散化

連続時間系の挙動を離散時間系で近似的に表す方法として数値積分法に基づく離散化がある．まずその基本的な考え方を述べる．

微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x)$$

に従う連続時間関数 x があるときに，時刻 t_i から t_f までの変化は

$$x(t_f) - x(t_i) = \int_{t_i}^{t_f} f(\tau, x(\tau)) d\tau \tag{10.23}$$

によって与えられる．

式 (10.23) 右辺の積分を数値積分で近似することを考える．これは区間 $[t_i, t_f]$ の中の数点での関数の値によって積分を計算しようとするものである．たとえば区間を n 分割してニュートン・コーツ公式を用いることが考えられる．このときには $t_i = kT$, $t_f = (k+n)T$ として分割点は $kT, (k+1)T, \ldots, (k+n)T$ であり，式 (10.23) は

$$\begin{aligned} x((k+n)T) &= x(kT) + c_0 f(kT, x(kT)) \\ &\quad + c_1 f((k+1)T, x((k+1)T)) + \cdots \\ &\quad + c_n f((k+n)T, x((k+n)T)) \end{aligned} \tag{10.24}$$

と書くことができる．ただし $c_0, c_1, \ldots, c_n$ は数値積分法によって定まる定数である．

制御システムとしてよく用いられるのは，$n=1$ での台形公式と前進および後退オイラー法の 3 種類である．特に台形法は，連続時間で設計した補償器を離散時間補償器としてホールド回路とサンプラにはさまれて利用する場合（図 10.5 参照）の変換に用いられることが多い．

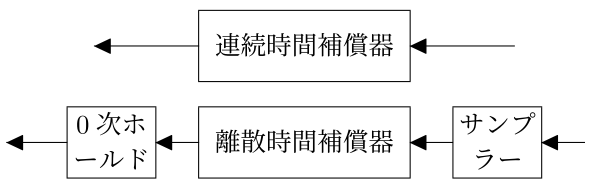

図 10.5：連続時間補償器から離散時間補償器への変換

変換の方法を 1 次系

$$\frac{dx}{dt} = -ax + v$$

をもとにして考える．この場合 $v(t)$ を時間関数として $f(t,x) = -ax + v(t)$ である場合に相当する．時間軸を $T > 0$ ごとに区切って $t_k = kT$ とする．そして離散時間の変数 y と u を連続時間の変数と

$$y(k) = x(kT), \quad u(k) = v(kT),$$

として関連付ける．

前進長方形法（前進オイラー法）は，式 (10.24) において $c_0 = T$, $c_1 = 0$ とおく場合である．すると式 (10.24) は

$$y(k+1) = y(k) + T\left(-ay(k) + u(k)\right)$$

となるので

$$y(k+1) - (1-aT)\,y(k) = Tu(k) \tag{10.25}$$

を得る．これより離散時間システムの伝達関数は

$$H_F(z) = \frac{T}{z-(1-aT)} = \frac{1}{\frac{z-1}{T} + a} \tag{10.26}$$

である．

後退長方形法（後退オイラー法）は，式 (10.24) において $c_0 = 0$, $c_1 = T$ とおく場合である．すると式 (10.24) は

$$y(k+1) = y(k) + T\left(-ay(k+1) + u(k+1)\right)$$

となるので

$$y(k+1) - \frac{1}{(1+aT)} y(k) = \frac{T}{(1+aT)} u(k+1) \tag{10.27}$$

を得る．これより離散時間システムの伝達関数は

$$H_B(z) = \frac{\frac{T}{1+aT} z}{z - \frac{1}{(1+aT)}} = \frac{1}{\frac{z-1}{Tz} + a} \tag{10.28}$$

である．

台形法を用いた場合は，式 (10.24) において $c_0 = T/2$, $c_1 = T/2$ とおく場合である．すると式 (10.24) は

$$\begin{aligned} y(k+1) = y(k) &+ \frac{T}{2}\left(-ay(k) + u(k)\right) \\ &+ \frac{T}{2}\left(-ay(k+1) + u(k+1)\right) \end{aligned}$$

となるので

$$\begin{aligned} &y(k+1) - \frac{2-aT}{2+aT} y(k) \\ &\qquad = \frac{T}{2+aT} u(k+1) + \frac{T}{2+aT} u(k) \end{aligned} \tag{10.29}$$

を得る．これより離散時間システムの伝達関数は

$$\begin{aligned} H_T(z) &= \frac{\frac{T}{2+aT}(z+1)}{z - \frac{2-aT}{2+aT}} \\ &= \frac{T(z+1)}{2(z-1) + aT(z+1)} = \frac{1}{\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1} + a} \end{aligned} \tag{10.30}$$

である．

一般的な伝達関数に関しても，上の例と同様の考察をすることにより連続時間系から離散時間系への変換は，ラプラス変換の変数 s を

$$s = \frac{z-1}{T}, \quad \text{前進法} \tag{10.31}$$

$$s = \frac{z-1}{Tz}, \quad \text{後退法} \tag{10.32}$$

$$s = \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}, \quad \text{台形法} \tag{10.33}$$

と置き換えることによって得られることを示すことができる．この結果として連続時間の伝達関数 $H(s)$ はそれぞれの変換によって

$$\begin{aligned} H_F(z) &= H(\frac{z-1}{T}), \quad \text{前進法} \\ H_B(z) &= H(\frac{z-1}{Tz}), \quad \text{後退法} \\ H_T(z) &= H(\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}), \quad \text{台形法} \end{aligned}$$

という離散時間の伝達関数にうつされる．台形法は Tustin の方法，または双一次変換法とも呼ばれている．

逆に離散時間系の変数 z を連続時間系の変数 s で置き換えるには規則

$$
\begin{aligned}
z &= 1 + Ts, \quad \text{前進法} \\
z &= \frac{1}{1 - Ts}, \quad \text{後退法} \\
z &= \frac{1 + \frac{Ts}{2}}{1 - \frac{Ts}{2}}, \quad \text{台形法}
\end{aligned}
$$

を用いることになる．

ここで連続時間伝達関数の逆ラプラス変換であるインパルス応答が減衰するためには，極が

$$\mathrm{Re}\, s < 0 \tag{10.34}$$

にあることが必要十分である．また離散時間伝達関数の逆 z 変換であるインパルス応答が減衰するためには，極は

$$|z| < 1 \tag{10.35}$$

にあることが必要十分である．前進法，後退法，台形法による離散化とこれらの複素数の領域との関係を考えておく．

まず前進法については式 (10.31) より

$$\mathrm{Re}\, s < 0 \Leftrightarrow \mathrm{Re}\, z < 1$$

であることに注意する．後進法については $z = \frac{1}{2} + r\exp(j\theta)$ とおくと式 (10.32) より

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Re}\, s < 0 \\
&\Leftrightarrow \mathrm{Re}\, \frac{\frac{1}{2} + r\exp(j\theta) - 1}{\frac{1}{2} + r\exp(j\theta)} < 0 \\
&\Leftrightarrow \mathrm{Re} \left(r\exp(j\theta) - \frac{1}{2} \right) \left(r\exp(-j\theta) + \frac{1}{2} \right) < 0 \\
&\Leftrightarrow \mathrm{Re} \left(r^2 - \frac{1}{4} + jr\sin\theta \right) < 0 \\
&\Leftrightarrow |r| < \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

である．最後に台形法（双一次変換）については $z = r\exp(j\theta)$ とおくと式 (10.33) より

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Re}\, s < 0 \\
&\Leftrightarrow \mathrm{Re}\, \frac{r\exp(j\theta) - 1}{r\exp(j\theta) + 1} < 0 \\
&\Leftrightarrow \mathrm{Re}\, (r\exp(j\theta) - 1)(r\exp(-j\theta) + 1) < 0 \\
&\Leftrightarrow \mathrm{Re} \left(r^2 - 1 + j2r\sin\theta \right) < 0 \\
&\Leftrightarrow |r| < 1
\end{aligned}
$$

である．これらをまとめると領域 $\mathrm{Re}\, s < 0$ は

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Re}\, z &< 1, \quad \text{前進法} \\
\left| z - \frac{1}{2} \right| &< \frac{1}{2} \quad \text{後退法} \\
|z| &< 1, \quad \text{台形法}
\end{aligned}
$$

に写される．前進法を用いると連続時間では減衰するインパルス応答をもつ伝達関数が，離散時間では発散するインパルス応答をもつ伝達関数に写されることがある．後退法および台形法ではそのようなことはなく，連続時間では減衰するインパルス応答をもつ伝達関数ならば離散時間でも減衰するインパルス応答をもつ伝達関数に写される．しかし後退法では連続時間で発散するインパルス応答をもつ伝達関数であっても離散時間でも減衰するインパルス応答をもつ伝達関数に写されるものがある．台形法ではそのようなことがなく，連続時間の s の領域 (10.34) と離散時間の z の領域 (10.35) が一対一に対応している．

練習問題

【1】 連続時間の伝達関数

$$H(s) = \frac{1}{(s^2 + 3s + 2)}$$

を考える．サンプル周期が $T = 1$ であるとき，サンプルホールドを用いて離散化された伝達関数 $H_{\mathrm{ho}}(z)$ を求めよ．また $H_{\mathrm{ho}}(z)$ の極の位置を確認せよ．