数理工学専攻　太田快人

11　システムモデリングの例

2 章では，モデル化のあらましを知るために，水タンクの水位モデルをはじめ，自動車の平面運動モデル，鉄球の磁気浮上実験モデル，生態系のモデルについて述べた．また 3 章では，電気回路のモデル化を，4 章では，バネ，ダンパーなどの機械要素のモデル化について述べてきた．本章では，それ以外のシステムのモデル化について概説することにする．

11.1 節では，生体システムのモデリングとして，ショウジョウバエの概日周期モデルについて紹介する．そこでは化学反応の記述に基づくタンパク質の挙動が重要な役割を果たすことになる．11.2 節では，航空機の運動モデルについて述べる．そこでは，力学による運動の解析が重要である．

11.1　生体システムの例

生体システムの例として，Goldbeter が提唱したショウジョウバエの概日周期モデル [G, LGG] について紹介しておく．また文献 [U] も参照されたい．

11.1.1　酵素反応速度論

概日周期を記述する微分方程式を示す前に，生体内酵素がかかわる化学変化について，その動的な動きを考察してみる．本節について詳しくは、文献 [C] などを参照されたい．

質量作用の法則　化学反応の反応速度については，物質のモル濃度に依存することが知られており，反応

$$\mathrm{A}+\mathrm{B} \xrightarrow{k} \mathrm{C}$$

に関して，物質 A, B, C のモル濃度をそれぞれ a, b, c とすれば，

$$\frac{dc}{dt}=kab \tag{11.1}$$

である．ただし k は速度定数（rate constant）である．式 (11.1) を質量作用の法則（law of mass action）という．一般には逆向きの反応も起こり，

$$\mathrm{A}+\mathrm{B} \underset{k_c}{\overset{k_a}{\rightleftharpoons}} \mathrm{C}$$

と記述されている場合，質量作用の法則は

$$\frac{dc}{dt}=k_a ab-k_c c$$

となっている．

ミカエリス・メンテン式　ここで酵素が生体内の反応に係わる場合を考える．つまり

$$\mathrm{E}+\mathrm{A} \underset{k_-}{\overset{k_1}{\rightleftharpoons}} \mathrm{EA} \xrightarrow{k_2} \mathrm{E}+\mathrm{B} \tag{11.2}$$

のように酵素 E が物質 A と反応して複合体（中間物質）EA が生成され，それが分解して E と B になるとする．ここで物質 E, A, EA, B のモル濃度をそれぞれ e, a, c, b とすれば，質量作用の法則より

$$\begin{aligned}
\frac{de}{dt}&=-k_1ea+k_-c+k_2c\\
\frac{da}{dt}&=-k_1ea+k_-c\\
\frac{dc}{dt}&=k_1ea-k_-c-k_2c\\
\frac{db}{dt}&=k_2c
\end{aligned}$$

である．これより $d(e+c)/dt=0$ であるので，$e+c=e_0$（定数）であることに注意する．

中間物質のモル濃度が変化しない状態を考え，これを Briggs と Haldane は定常状態と呼んでいる（[C] 参照）．そのとき

$$k_1\left(e_0-c\right)a-\left(k_-+k_2\right)c=0$$

であるので，

$$c=\frac{k_1e_0a}{k_1a+k_-+k_2}$$

を得る．したがって物質 A から B への反応は

$$\frac{db}{dt}=\frac{k_2k_1e_0a}{k_1a+k_-+k_2}=\frac{k_2e_0a}{\frac{k_-+k_2}{k_1}+a}$$

によって記述される．これをミカエリス・メンテン式（Michaelis-Menten equation）という．ここで

$$v=k_2e_0,\quad K=\frac{k_-+k_2}{k_1}$$

とおいて v を最大反応速度（maximum velocity），K をミカエリス定数（Michaelis constant）という．

11.1.2　5 次の確定系モデル

概日周期（circadian rhythm）とは，生物がもっている 24 時間周期の挙動のことである．概日周期を調べる研究は，以前から行われていたが，時を司るタンパク質がその遺伝子発現に与えるフィードバック効果から概日周期が現れていることが次第にわかってきた．

本節では，文献 [G] で提案されているショウジョウバエ（drosophila）の概日周期モデルについて記す．このモデルはタンパク質 PER の転写抑制の仕組みによって記述される．核タンパク質 PER から転写（transcription）によって伝令 RNA（messenger RNA）である *per* が作られる．ただしここには転写抑制（transcription repression）とよばれる負フィードバックが働い

ている．伝令 RNA per は，細胞質タンパク質 PER_0 を生合成（translation）するとともに，その一部は分解される．タンパク質 PER_0 は，キナーゼ（kinase）とホスファターゼ（phosphatase）によってそれぞれリン酸化（phosphorylation）と脱リン酸化（dephosphorylation）して，細胞質タンパク質 PER_1, PER_2 に変わる．タンパク質 PER_2 は核タンパク質 PER に輸送（transport）されるとともに，その一部は分解される．これらの関係を図 11.1 に示す．

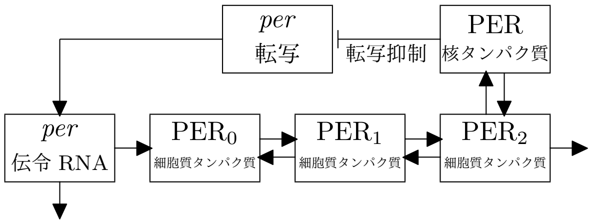

図 11.1: 概日周期モデル（タンパク質 PER）

さらにタンパク質の変化について，それぞれの反応を見ていき，微分方程式として全体の動きをモデル化してみる．伝令 RNA のモル濃度を M，細胞質タンパク質 PER_0, PER_1, PER_2 のモル濃度をそれぞれ P_0, P_1, P_2，核タンパク質 PER のモル濃度を P_N とする．伝令 RNA mPER は，最大反応速度 v_s，閾値 K_I，協同効果の次数（degree of cooperativity）n のヒル（Hill）の式の形をした転写抑制の仕組みをもっている．またミカエリス定数（Michaelis constant）K_m，最大反応速度 v_m のミカエリス･メンテン式にしたがう酵素反応によって分解される．伝令 RNA mPER からのタンパク質 PER_0 の合成は速度定数（rate constant）k_s の比例関係にあるとする．PER_0 から PER_1，PER_1 から PER_2 のリン酸化と脱リン酸化においては，酵素キナーゼならびにホスファターゼのミカエリス定数（Michaelis constant）と最大反応速度をそれぞれ K_1, K_2, K_3, K_4, V_1, V_2, V_3, V_4 としたミカエリス・メンテン式にしたがう．核タンパク質 PER と細胞質タンパク質 PER_2 の間には，速度定数 k_1 および k_2 での移行があるものとする．またタンパク質 PER_2 は，ミカエリス定数（Michaelis constant）K_d，最大反応速度 v_d のミカエリス・メンテン式にしたがう酵素反応によって分解される．

以上のタンパク質の生化学反応を記載して，

$$\frac{dM}{dt} = v_s \frac{K_I^n}{K_I^n + P_N^n} - v_m \frac{M}{K_m + M} \tag{11.3}$$

$$\frac{dP_0}{dt} = k_s M - V_1 \frac{P_0}{K_1 + P_0} + V_2 \frac{P_1}{K_2 + P_1} \tag{11.4}$$

$$\begin{aligned}\frac{dP_1}{dt} &= V_1 \frac{P_0}{K_1 + P_0} - V_2 \frac{P_1}{K_2 + P_1} \\ &\qquad - V_3 \frac{P_1}{K_3 + P_1} + V_4 \frac{P_2}{K_4 + P_2}\end{aligned} \tag{11.5}$$

$$\begin{aligned}\frac{dP_2}{dt} &= V_3 \frac{P_1}{K_3 + P_1} - V_4 \frac{P_2}{K_4 + P_2} \\ &\qquad - k_1 P_2 + k_2 P_N - v_d \frac{P_2}{K_d + P_2}\end{aligned} \tag{11.6}$$

$$\frac{dP_N}{dt} = k_1 P_2 - k_2 P_N \tag{11.7}$$

という微分方程式を得る．

表 11.1: 概日周期モデルの定数

定数	値
v_s	$0.76\,\mu\mathrm{Mh}^{-1}$
v_m	$0.65\,\mu\mathrm{Mh}^{-1}$
k_s	$0.38\,\mathrm{h}^{-1}$
V_1	$3.2\,\mu\mathrm{Mh}^{-1}$
V_2	$1.58\,\mu\mathrm{Mh}^{-1}$
V_3	$5\,\mu\mathrm{Mh}^{-1}$
V_4	$2.5\,\mu\mathrm{Mh}^{-1}$
v_d	$0.95\,\mu\mathrm{Mh}^{-1}$
k_1	$1.9\,\mathrm{h}^{-1}$
k_2	$1.3\,\mathrm{h}^{-1}$
K_m	$0.5\,\mu\mathrm{M}$
K_I	$1\,\mu\mathrm{M}$
K_d	$0.2\,\mu\mathrm{M}$
K_1	$2\,\mu\mathrm{M}$
K_2	$2\,\mu\mathrm{M}$
K_3	$2\,\mu\mathrm{M}$
K_4	$2\,\mu\mathrm{M}$
n	4

各定数を表 11.1 のように置いて，適当な初期値からシミュレーションを行うと，図 11.2 を得る．ただし μM はモル濃度の単位で 10^{-6}mol/L を表す．実線で伝令 RNA mPER，点線で細胞質タンパク質 PER_0，一点鎖線で細胞質タンパク質 PER_1，破線で細胞質タンパク質 PER_2，太い実線で核タンパク質 PER のモル濃度をそれぞれ表す．図 11.3 には伝令 RNA mPER とタンパク質総量をそれぞれ実線と太い実線で表す．

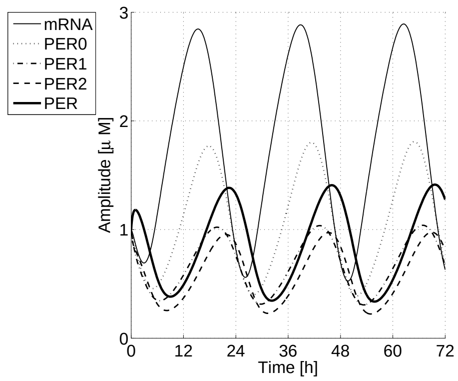

図 11.2：タンパク質 PER の時間変化（正常）

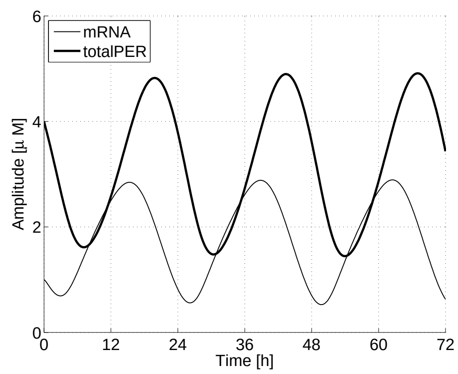

図 11.3：総タンパク質 PER の時間変化（正常）

図 11.2,11.3 で，タンパク質のモル濃度には 24 時間周期の振動が表れていることに注意する．また図 11.2 では，伝令 RNA mPER に比べてタンパク質 PER のモル濃度には，約 7 時間の遅れがある．図 11.3 では，

伝令 RNA mPER に比べて総タンパク質のモル濃度には，約 4.5 時間の遅れがある．これらのことが，生物学的知見と一致している．

ショウジョウバエには，正常 (24 時間周期), 短周期変異 (19 時間周期), 長周期変異 (29 時間周期), 無周期変異の 4 種類の表現型がある．文献 [G] では，タンパク質 PER_2 の酵素反応による分解における最大反応速度 v_d と表現型の関係が考察されている．最大反応速度 v_d を表 11.1 の値に対して小さくした場合（$v_d = 0.7$）を図 11.4 に示す．ここでは，周期 19 時間の挙動が表れている．逆に最大反応速度 v_d を正常値に比して大きくした場合（$v_d = 1.88$）を図 11.5 に示す．ここでは，周期 29 時間の挙動が表れている．

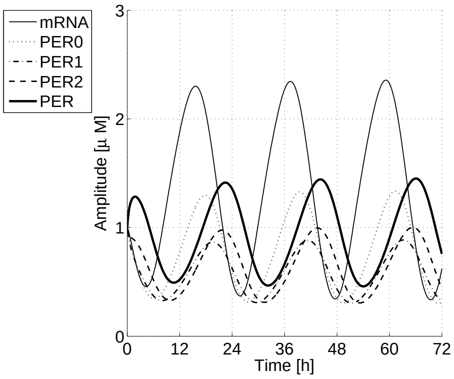

図 11.4：タンパク質 PER の時間変化（短周期変異）

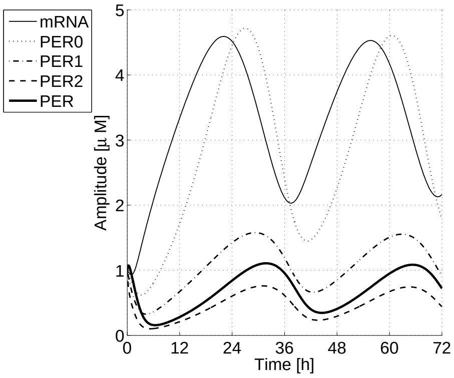

図 11.5：タンパク質 PER の時間変化（長周期変異）

11.1.3　10 次の確定系モデル

11.1.2 節では，タンパク質 PER のモル濃度変化を記述する 5 次のモデルを用いて，概日周期を表す周期的な挙動が起こることを説明した．しかし 5 次のモデルは，概日周期に光が与える影響を説明することはできない．本節では文献 [LGG] で述べられている二種類のタンパク質 PER と TIM が関与する 10 次のモデルの説明を行う．

二種類のタンパク質 PER と TIM の伝令 RNA mPER と mTIM のモル濃度をそれぞれ M_P, M_T とする．5 次のモデルと同様にタンパク質 PER と TIM のリン酸化を考慮してタンパク質 PER_0, PER_1, PER_2, TIM_0, TIM_1, TIM_2 のモル濃度をそれぞれ P_0, P_1, P_2, T_0, T_1, T_2 とする．PER - TIM 複合体の細胞質タンパク質ならびに核タンパク質のモル濃度をそれぞれ C, C_N とする．このときこれらのタンパク質は以下の微分方程式を満たすものと考える．

$$\begin{aligned}
\frac{dM_P}{dt} &= v_{sP}\frac{K_{IP}^n}{K_{IP}^n + C_N^n} - v_{mP}\frac{M_P}{K_{mP}+M_P} \\
&\quad - k_d M_P \\
\frac{dP_0}{dt} &= k_{sP}M_P - V_{1P}\frac{P_0}{K_{1P}+P_0} \\
&\quad + V_{2P}\frac{P_1}{K_{2P}+P_1} - k_d P_0 \\
\frac{dP_1}{dt} &= V_{1P}\frac{P_0}{K_{1P}+P_0} - V_{2P}\frac{P_1}{K_{2P}+P_1} \\
&\quad - V_{3P}\frac{P_1}{K_{3P}+P_1} + V_{4P}\frac{P_2}{K_{4P}+P_2} \\
&\quad - k_d P_1 \\
\frac{dP_2}{dt} &= V_{3P}\frac{P_1}{K_{3P}+P_1} - V_{4P}\frac{P_2}{K_{4P}+P_2} \\
&\quad - k_3 P_2 T_2 + k_4 C - v_{dP}\frac{P_2}{K_{dP}+P_2} \\
&\quad - k_d P_2 \\
\frac{dM_T}{dt} &= v_{sT}\frac{K_{IT}^n}{K_{IT}^n + C_N^n} - v_{mT}\frac{M_T}{K_{mT}+M_T} \\
&\quad - k_d M_T \\
\frac{dT_0}{dt} &= k_{sT}M_T - V_{1T}\frac{T_0}{K_{1T}+T_0} \\
&\quad + V_{2T}\frac{T_1}{K_{2T}+T_1} - k_d T_0 \\
\frac{dT_1}{dt} &= V_{1T}\frac{T_0}{K_{1T}+T_0} - V_{2T}\frac{T_1}{K_{2T}+T_1} \\
&\quad - V_{3T}\frac{T_1}{K_{3T}+T_1} + V_{4T}\frac{T_2}{K_{4T}+T_2} \\
&\quad - k_d T_1 \\
\frac{dT_2}{dt} &= V_{3T}\frac{T_1}{K_{3T}+T_1} - V_{4T}\frac{T_2}{K_{4T}+T_2} \\
&\quad - k_3 P_2 T_2 + k_4 C - v_{dT}\frac{T_2}{K_{dT}+T_2} \\
&\quad - k_d T_2 \\
\frac{dC}{dt} &= k_3 P_2 T_2 - k_4 C - k_1 C + k_2 C_N - k_{dC} C \\
\frac{dC_N}{dt} &= k_1 C - k_2 C_N - k_{dN} C_N
\end{aligned}$$

これらの式は，式 (11.3) -(11.7) と同様の考え方に基づいて，定式化されている．ただし線形に効く速度定数はそれほど重要でないために，同じ値にそろえてある．

ここで，タンパク質 TIM_2 の酵素反応による分解に関する最大反応速度 v_{dT} は，定数であるが，光の量によって大きさが異なる．つまり環境が暗いときには，v_{dT} は小さな値になり，明るいときには，大きな値になる．このモデルを用いて，光が概日周期に与える影響を調べる研究が行われた [LG].

11.2　航空機の運動方程式

ここでは，航空機の運動方程式記述について，説明する．詳しくは，文献 [KOK] を参照されたい．

11.2.1　動座標系で表示した運動方程式

航空機の運動方程式を求めるためには，地上に固定された座標系と，航空機に固定された座標系の間の関係を求めることから始める．まずは剛体が 3 次元空間を運動する場合の方程式を剛体に固定された座標系の上で導いてみる．

動座標系でのベクトルの微分　航空機に固定された座標系の XYZ 軸の単位ベクトルを e_x, e_y, e_z とおく．この座標系は，角速度 $\vec{\Omega}$ を有しているものとする．航空機に固定された座標系で表したベクトル $\vec{V}$

$$\vec{V} = V_x e_x + V_y e_y + V_z e_z$$

の時間微分を求めてみる．ここでベクトル外積を $\times$ で表記すると

$$\begin{aligned}\frac{de_x}{dt} &= \vec{\Omega} \times e_x \\ \frac{de_y}{dt} &= \vec{\Omega} \times e_y \\ \frac{de_z}{dt} &= \vec{\Omega} \times e_z\end{aligned}$$

である（図 11.6 参照）．ただし図では，角速度の成分を

$$\vec{\Omega} = \Omega_x e_x + \Omega_y e_y + \Omega_z e_z$$

とおいている．すると

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{V}}{dt} &= \frac{dV_x}{dt}e_x + \frac{dV_y}{dt}e_y + \frac{dV_z}{dt}e_z \\ &\quad + V_x\vec{\Omega} \times e_x + V_y\vec{\Omega} \times e_y + V_z\vec{\Omega} \times e_z \\ &= \frac{d^*\vec{V}}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{V} \qquad (11.8)\end{aligned}$$

である．ただし $(d^*\vec{V})/(dt)$ は $\vec{V}$ の X, Y, Z 成分を形式的に時間微分することを意味する．

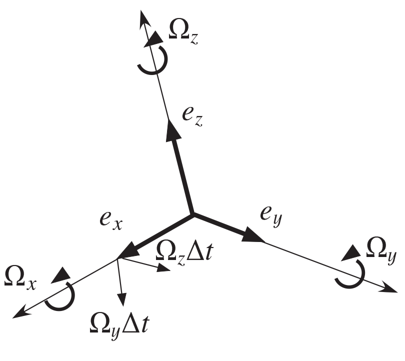

図 11.6: 座標軸の回転

剛体の運動方程式　航空機を剛体として考えることにする．機体重心を座標原点にとる．機体の質量を m，機体の速度ベクトル $\vec{V}$，機体の角運動量 $\vec{L}$，機体に加わる力を $\vec{F}$，機体重心のモーメントを $\vec{G}$ とすれば，剛体の運動方程式は

$$m\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F} \qquad (11.9)$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{G} \qquad (11.10)$$

である．

ここで座標系は機体に固定されているとして式 (11.8) を用いて，成分ごとの運動方程式を求めてみる．そこで

$$\begin{aligned}\vec{V} &= V_x e_x + V_y e_y + V_z e_z \\ \vec{\Omega} &= \Omega_x e_x + \Omega_y e_y + \Omega_z e_z \\ \vec{F} &= F_x e_x + F_y e_y + F_z e_z \\ \vec{G} &= G_x e_x + G_y e_y + G_z e_z\end{aligned}$$

とおく．また機体重心からの位置ベクトル

$$\vec{r} = x e_x + y e_y + z e_z$$

ならびに機体の密度 $d\mu$ を用いると $\vec{r}$ が機体重心を起点としていることから

$$\int \vec{r} d\mu = 0$$

に注意すると，角運動量は（$\vec{V} + \vec{\Omega} \times \vec{r}$ が $\vec{r}$ の位置にある点の速度であることに注意して）

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \int \vec{r} \times \left(\vec{V} + \vec{\Omega} \times \vec{r}\right) d\mu \\ &= \int \vec{r} d\mu \times \vec{V} + \int \vec{r} \times \left(\vec{\Omega} \times \vec{r}\right) d\mu \\ &= \int \vec{r} \times \left(\vec{\Omega} \times \vec{r}\right) d\mu\end{aligned}$$

である．ただし積分は機体全体にわたって行うものとする．ここで I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} をそれぞれ X, Y, Z 軸に関する慣性モーメント，I_{xy}, I_{yz}, I_{zx} を慣性乗積として

$$\begin{aligned}I_{xx} &= \int \left(y^2 + z^2\right) d\mu \\ I_{xy} &= \int xy d\mu \\ I_{xz} &= \int xz d\mu \\ I_{yx} &= \int yx d\mu \\ I_{yy} &= \int \left(z^2 + x^2\right) d\mu \\ I_{yz} &= \int yz d\mu \\ I_{zx} &= \int zx d\mu \\ I_{zy} &= \int zy d\mu \\ I_{zz} &= \int \left(x^2 + y^2\right) d\mu\end{aligned}$$

と定めると

$$\begin{aligned}&\vec{r} \times \left(\vec{\Omega} \times \vec{r}\right) \\ &= \vec{\Omega}\vec{r} \cdot \vec{r} - \vec{r}\vec{r} \cdot \vec{\Omega} \\ &= \left(x^2 + y^2 + z^2\right)\left(\Omega_x e_x + \Omega_y e_y + \Omega_z e_z\right) \\ &\quad - \left(x\Omega_x + y\Omega_y + z\Omega_z\right)\left(x e_x + y e_y + z e_z\right) \\ &= \left\{\left(y^2 + z^2\right)\Omega_x - xy\Omega_y - xz\Omega_z\right\} e_x \\ &\quad + \left\{\left(z^2 + x^2\right)\Omega_y - yz\Omega_z - yx\Omega_x\right\} e_y \\ &\quad + \left\{\left(x^2 + y^2\right)\Omega_z - zx\Omega_x - zy\Omega_y\right\} e_z\end{aligned}$$

であるので

$$
\begin{aligned}
\vec{L} &= \int \vec{r} \times \left(\vec{\Omega} \times \vec{r}\right) d\mu \\
&= \left(I_{xx}\Omega_x - I_{xy}\Omega_y - I_{xz}\Omega_z\right) e_x \\
&\quad + \left(-I_{yx}\Omega_x + I_{yy}\Omega_y - I_{yz}\Omega_z\right) e_y \\
&\quad + \left(-I_{zx}\Omega_x - I_{zy}\Omega_y + I_{zz}\Omega_z\right) e_z
\end{aligned}
$$

である．これより

$$
\begin{aligned}
&\Omega \times \vec{L} \\
&= \{\Omega_y \left(-I_{zx}\Omega_x - I_{zy}\Omega_y + I_{zz}\Omega_z\right) \\
&\quad -\Omega_z \left(-I_{yx}\Omega_x + I_{yy}\Omega_y - I_{yz}\Omega_z\right)\} e_x \\
&\quad + \{\Omega_z \left(I_{xx}\Omega_x - I_{xy}\Omega_y - I_{xz}\Omega_z\right) \\
&\quad -\Omega_x \left(-I_{zx}\Omega_x - I_{zy}\Omega_y + I_{zz}\Omega_z\right)\} e_y \\
&\quad + \{\Omega_x \left(-I_{yx}\Omega_x + I_{yy}\Omega_y - I_{yz}\Omega_z\right) \\
&\quad -\Omega_y \left(I_{xx}\Omega_x - I_{xy}\Omega_y - I_{xz}\Omega_z\right)\} e_z
\end{aligned}
$$

である．すると式 (11.8) を適用すると式 (11.9),(11.10) は

$$
m\left(\dot{V}_x + \Omega_y V_z - \Omega_z V_y\right) = F_x \tag{11.11}
$$

$$
m\left(\dot{V}_y + \Omega_z V_x - \Omega_x V_z\right) = F_y \tag{11.12}
$$

$$
m\left(\dot{V}_z + \Omega_x V_y - \Omega_y V_x\right) = F_z \tag{11.13}
$$

$$
\begin{aligned}
&I_{xx}\dot{\Omega}_x - I_{xy}\dot{\Omega}_y - I_{xz}\dot{\Omega}_z \\
&-I_{xz}\Omega_x\Omega_y + \left(I_{zz} - I_{yy}\right)\Omega_y\Omega_z \\
&+I_{yx}\Omega_z\Omega_x - I_{zy}\Omega_y^2 + I_{yz}\Omega_z^2 = G_x
\end{aligned} \tag{11.14}
$$

$$
\begin{aligned}
&-I_{yx}\dot{\Omega}_x + I_{yy}\dot{\Omega}_y - I_{yz}\dot{\Omega}_z \\
&+I_{zy}\Omega_x\Omega_y - I_{xy}\Omega_y\Omega_z + \left(I_{xx} - I_{zz}\right)\Omega_z\Omega_x \\
&+I_{zx}\Omega_x^2 - I_{xz}\Omega_z^2 = G_y
\end{aligned} \tag{11.15}
$$

$$
\begin{aligned}
&-I_{zx}\dot{\Omega}_x - I_{zy}\dot{\Omega}_y + I_{zz}\dot{\Omega}_z \\
&+ \left(I_{yy} - I_{xx}\right)\Omega_x\Omega_y + I_{xz}\Omega_y\Omega_z \\
&-I_{yz}\Omega_z\Omega_x - I_{yx}\Omega_x^2 + I_{xy}\Omega_y^2 = G_z
\end{aligned} \tag{11.16}
$$

となる．式 (11.11)–(11.16) によって，重心に働く力とモーメントを入力とし，$V_x, V_y, V_z, \Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$ を状態とする非線形な運動方程式が与えられている．

11.2.2　地上座標系に対する位置と姿勢

前節までに，航空機に固定された座標系での速度と角速度を表す運動方程式を導いた．この節では，地上に固定された座標系に対する航空機の位置と姿勢を決定するための運動方程式を導く．

オイラー角　地上に固定した座標系と機体に固定した座標系の間の変換は，オイラー角を用いて書くことができる．地上に固定した座標系（これを $X_0Y_0Z_0$ 系とする）と機体に固定した座標系（これを $X_3Y_3Z_3$ 系とする）を考えて，二つの座標系を回転によって重ね合わせるものとする．そのため途中に $X_1Y_1Z_1$ 系と $X_2Y_2Z_2$ 系を次のように準備する．まず Z 軸をまわりに Ψ 回転して，X_0 軸方向が Z_0 と X_3 で定める平面に含まれるようにする．次に Y 軸まわりに Θ 回転して X_1 を X_3 に一致させる．最後に X 軸まわりに Φ 回転して，座標系を重ねあわせる．こらら三つの角度をオイラー角という．オイラー角には，どの軸まわりに回転させるかという自由度があるので，ここでの記述に合致しない定義もある．

回転行列を用いた表現　上記の座標変換を具体的にベクトルの成分表示で書いてみる．$X_0Y_0Z_0$ 系の単位ベクトルを $e_{x_0}, e_{y_0}, e_{z_0}$，$X_3Y_3Z_3$ 系の単位ベクトルを e_x, e_y, e_z として

$$
\begin{aligned}
\vec{V} &= V_{x_0}e_{x_0} + V_{y_0}e_{y_0} + V_{z_0}e_{z_0} \\
&= V_x e_x + V_y e_y + V_z e_z
\end{aligned}
$$

とすると，回転行列を

$$
R_1 = \begin{bmatrix} \cos\Psi & \sin\Psi & 0 \\ -\sin\Psi & \cos\Psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
R_2 = \begin{bmatrix} \cos\Theta & 0 & -\sin\Theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\Theta & 0 & \cos\Theta \end{bmatrix}
$$

$$
R_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\Phi & \sin\Phi \\ 0 & -\sin\Phi & \cos\Phi \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
R &= R_3R_2R_1 \\
&= \begin{bmatrix} \cos\Theta\cos\Psi & \cos\Theta\sin\Psi & -\sin\Theta \\ \sin\Phi\sin\Theta\cos\Psi - \cos\Phi\sin\Psi & \sin\Phi\sin\Theta\sin\Psi + \cos\Phi\cos\Psi & \sin\Phi\cos\Theta \\ \cos\Phi\sin\Theta\cos\Psi - \sin\Phi\sin\Psi & \cos\Phi\sin\Theta\sin\Psi - \sin\Phi\cos\Psi & \cos\Phi\cos\Theta \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

と定めると

$$
\begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} V_{x_0} \\ V_{y_0} \\ V_{z_0} \end{bmatrix}
$$

である．この逆向きの変換は

$$
\begin{bmatrix} V_{x_0} \\ V_{y_0} \\ V_{z_0} \end{bmatrix} = R^{-1} \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix} \tag{11.17}
$$

であり，逆行列 R^{-1} は

$$
\begin{aligned}
R^{-1} &= R_1^{-1}R_2^{-1}R_3^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} \cos\Theta\cos\Psi & \sin\Phi\sin\Theta\cos\Psi - \cos\Phi\sin\Psi & \cos\Phi\sin\Theta\cos\Psi + \sin\Phi\sin\Psi \\ \cos\Theta\sin\Psi & \sin\Phi\sin\Theta\sin\Psi + \cos\Phi\cos\Psi & \cos\Phi\sin\Theta\sin\Psi - \sin\Phi\cos\Psi \\ -\sin\Theta & \sin\Phi\cos\Theta & \cos\Phi\cos\Theta \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

となっている．

機体角速度 最後にオイラー角と機体角速度 $\vec{\Omega}$ との関係を導いておく．オイラー角 Ψ は $X_0Y_0Z_0$ 系での Z 軸まわりの回転角，Θ は $X_1Y_1Z_1$ 系での Y 軸まわりの回転角，Φ は $X_2Y_2Z_2$ 系での X 軸まわりの回転角であるので，

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\Omega_x\\ \Omega_y\\ \Omega_z\end{bmatrix} &= R_3R_2R_1\begin{bmatrix}0\\0\\ \dot{\Psi}\end{bmatrix} + R_3R_2\begin{bmatrix}0\\ \dot{\Theta}\\0\end{bmatrix} + R_3\begin{bmatrix}\dot{\Phi}\\0\\0\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}1 & 0 & -\sin\Theta\\ 0 & \cos\Phi & \sin\Phi\cos\Theta\\ 0 & -\sin\Phi & \cos\Phi\cos\Theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\Phi}\\ \dot{\Theta}\\ \dot{\Psi}\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}\dot{\Phi}-\sin\Theta\dot{\Psi}\\ \cos\Phi\dot{\Theta}+\sin\Phi\cos\Theta\dot{\Psi}\\ -\sin\Phi\dot{\Theta}+\cos\Phi\cos\Theta\dot{\Psi}\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{11.18}$$

である．式 (11.18) を逆に解くと

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\dot{\Phi}\\ \dot{\Theta}\\ \dot{\Psi}\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}1 & 0 & -\sin\Theta\\ 0 & \cos\Phi & \sin\Phi\cos\Theta\\ 0 & -\sin\Phi & \cos\Phi\cos\Theta\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\Omega_x\\ \Omega_y\\ \Omega_z\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}1 & \sin\Phi\tan\Theta & \cos\Phi\tan\Theta\\ 0 & \cos\Phi & -\sin\Phi\\ 0 & \sin\Phi\sec\Theta & \cos\Phi\sec\Theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Omega_x\\ \Omega_y\\ \Omega_z\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}\Omega_x+\Omega_y\sin\Phi\tan\Theta+\Omega_z\cos\Phi\tan\Theta\\ \Omega_y\cos\Phi-\Omega_z\sin\Phi\\ \Omega_y\sin\Phi\sec\Theta+\Omega_z\cos\Phi\sec\Theta\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{11.19}$$

である．式 (11.19) によってオイラー角の時間発展を記述している．式 (11.17) と組み合わせれば，角速度 Ω_x, Ω_y, Ω_z を与えることによって地上座標系から見た機体位置ならびに姿勢がわかる．

航空機の対称性，重力と空気力 航空機に固定される座標系は，航空機の対称性を考えて，X 軸を進行方向，Z 軸を下方に，Y 軸を進行方向に向かって右向きにとることが慣習になっている．航空機が左右対称であると仮定すると，慣性乗積のうち，

$$I_{xy} = I_{yx} = I_{yz} = I_{zy} = 0$$

が成り立つ．

式 (11.9),(11.10) を考える．航空機に加わる力は，重力と空気力である．航空機の重心を座標の原点に合わせているので，重力が寄与する重心まわりのモーメントは 0 であり，空気力にのみよってモーメント $\vec{G}$ が発生する．一方，力 $\vec{F}$ は双方に寄与があるので，

$$\vec{F} = \vec{F}_g + \vec{F}_a$$

と重力による項 $\vec{F}_g$（重力は地上固定座標では下向きに mg の大きさで働いているのでその成分は

$$\begin{bmatrix}F_{gx}\\ F_{gy}\\ F_{gz}\end{bmatrix} = R_3R_2R_1\begin{bmatrix}0\\0\\mg\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-mg\sin\Theta\\ mg\sin\Phi\cos\Theta\\ mg\cos\Phi\cos\Theta\end{bmatrix}$$

となる）と空気力による項 $\vec{F}a$ （ただしその成分を F_{ax}, F_{ax}, F_{ax} とする）に分けることができる．

以上を式 (11.11)-(11.16) に代入すると

$$m\left(\dot{V}_x+\Omega_yV_z-\Omega_zV_y\right) = -mg\sin\Theta+F_{ax} \tag{11.20}$$

$$m\left(\dot{V}_y+\Omega_zV_x-\Omega_xV_z\right) = mg\cos\Theta\sin\Phi+F_{ay} \tag{11.21}$$

$$m\left(\dot{V}_z+\Omega_xV_y-\Omega_yV_x\right) = mg\cos\Theta\cos\Phi+F_{az} \tag{11.22}$$

$$I_{xx}\dot{\Omega}_x-I_{xz}\dot{\Omega}_z-I_{xz}\Omega_x\Omega_y + \left(I_{zz}-I_{yy}\right)\Omega_y\Omega_z = G_x \tag{11.23}$$

$$I_{yy}\dot{\Omega}_y+\left(I_{xx}-I_{zz}\right)\Omega_z\Omega_x + I_{zx}\left(\Omega_x^2-\Omega_z^2\right) = G_y \tag{11.24}$$

$$-I_{zx}\dot{\Omega}_x+I_{zz}\dot{\Omega}_z+\left(I_{yy}-I_{xx}\right)\Omega_x\Omega_y + I_{xz}\Omega_y\Omega_z = G_z \tag{11.25}$$

として航空機の運動方程式を得る．実際に解くためには，オイラー角の挙動を計算する必要があり，式 (11.19) をともに解くことになる．

11.2.3 線形近似された運動方程式

ここでは，式 (11.20)-(11.25) を釣り合いの位置からの微小摂動が加わっているものとして，線形近似された運動方程式を求めることにする．

釣り合いの条件 直線定常飛行をしているときを釣り合いの位置として，その条件を求めてみる．航空機は，迎角 α_0，重心速度 V_{c0} にあるものとする．すると機体の速度は各座標軸に沿って

$$V_{x0} = V_{c0}\cos\alpha_0, \quad V_{y0} = 0, \quad V_{z0} = V_{c0}\sin\alpha_0$$

となる．一方角速度は直線運動を仮定しているので

$$\Omega_{x0} = \Omega_{y0} = \Omega_{z0} = 0$$

である．オイラー角は一定となるが，その定常値を

$$\Phi_0 = \phi_0, \quad \Theta_0 = \theta_0, \quad \Psi_0 = \psi_0 = 0$$

とする．ϕ_0 はロール角，θ_0 はピッチ角とよばれている．

以上より，釣り合い条件は式 (11.20)-(11.25) の左辺を 0 とおいて

$$\begin{aligned}F_{ax0}-mg\sin\theta_0 &= 0\\ F_{ay0}+mg\cos\theta_0\sin\phi_0 &= 0\\ F_{az0}+mg\cos\theta_0\cos\phi_0 &= 0\\ G_{x0} &= 0\\ G_{y0} &= 0\\ G_{z0} &= 0\end{aligned}$$

となる．

摂動項 機体が外乱などによって，定常飛行状態から微小な摂動を受けた場合を考える．機体速度，角速度，オイラー角を

$$\begin{aligned}V_x &= V_{x0} + v_x\\ V_y &= v_y\\ V_z &= V_{z0} + v_z\\ \Omega_x &= \omega_x\\ \Omega_y &= \omega_y\\ \Omega_z &= \omega_z\\ \Phi &= \phi_0 + \phi\\ \Theta &= \theta_0 + \theta\\ \Psi &= \psi\end{aligned}$$

と小文字で表した摂動項を考慮して書く．一方，力とモーメントの摂動項を Δ を付して

$$\begin{aligned}F_{ax} &= F_{ax0} + \Delta F_{ax}\\ F_{ay} &= F_{ay0} + \Delta F_{ay}\\ F_{az} &= F_{az0} + \Delta F_{az}\\ G_x &= \Delta G_x\\ G_y &= \Delta G_y\\ G_z &= \Delta G_z\end{aligned}$$

と書く．

オイラー角についてロール角 ϕ_0 と摂動項 ϕ, θ, ψ が微小であることから以下の近似を行う．

$$\begin{aligned}\sin\Phi &= \sin(\phi_0 + \phi) \approx \sin\phi_0 + \phi\\ \cos\Phi &= \cos(\phi_0 + \phi) \approx 1\\ \sin\Theta &= \sin(\theta_0 + \theta) \approx \sin\theta_0 + \theta\cos\theta_0\\ \cos\Theta &= \cos(\theta_0 + \theta) \approx \cos\theta_0 - \theta\sin\theta_0\\ \sin\Psi &= \sin\psi \approx \psi\\ \cos\Psi &= \cos\psi \approx 1\end{aligned}$$

これらを式 (11.20)-(11.25) に代入して，微小項と摂動項の 2 次以上の項を無視すれば，線形近似された方程式

$$m(\dot{v}_x + \omega_y V_{z0}) = -\theta mg\cos\theta_0 + \Delta F_{ax} \tag{11.26}$$

$$\begin{aligned}&m(\dot{v}_y + \omega_z V_{x0} - \omega_x V_{z0})\\ &\quad = \phi mg\cos\theta_0 + \Delta F_{ay}\end{aligned} \tag{11.27}$$

$$m(\dot{v}_z - \omega_y V_{x0}) = -\theta mg\sin\theta_0 + \Delta F_{az} \tag{11.28}$$

$$I_{xx}\dot{\omega}_x - I_{xz}\dot{\omega}_z = \Delta G_x \tag{11.29}$$

$$I_{yy}\dot{\omega}_y = \Delta G_y \tag{11.30}$$

$$-I_{zx}\dot{\omega}_x + I_{zz}\dot{\omega}_z = \Delta G_z \tag{11.31}$$

を得る．また式 (11.19) の近似式は

$$\begin{bmatrix}\dot{\phi}\\ \dot{\theta}\\ \dot{\psi}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\omega_x + \omega_z\tan\theta_0\\ \omega_y\\ \omega_z\sec\theta_0\end{bmatrix} \tag{11.32}$$

である．

空気力項の線形近似 空気力によって発生する力とモーメントの摂動項 ΔF_{ax}, ΔF_{ay}, ΔF_{az}, ΔG_x, ΔG_y, ΔG_z は，機体の速度，角速度，舵角，およびスロットル位置の関数であると考える．舵には補助翼（aileron），昇降舵（elevator），方向舵（rudder）の三種類がある．速度，角速度の摂動項を $v_x, v_y, v_z, \omega_x, \omega_y, \omega_z$ とし，舵角の摂動項を補助翼について δ_a，昇降舵について δ_e，方向舵について δ_r，スロットル位置の摂動項を δ_t とする．

これらの関数である A をある釣り合い位置で線形近似するというのは

$$\begin{aligned}A \approx A_0 &+ \frac{\partial A}{\partial v_x}v_x + \frac{\partial A}{\partial v_y}v_y + \frac{\partial A}{\partial v_z}v_z\\ &+ \frac{\partial A}{\partial \omega_x}\omega_x + \frac{\partial A}{\partial \omega_y}\omega_y + \frac{\partial A}{\partial \omega_z}\omega_z\\ &+ \frac{\partial A}{\partial \delta_a}\delta_a + \frac{\partial A}{\partial \delta_e}\delta_e + \frac{\partial A}{\partial \delta_r}\delta_r + \frac{\partial A}{\partial \delta_t}\delta_t\end{aligned}$$

と線形関数で近似することである．ここで $\partial A/\partial v_x$ は，釣り合い状態での微係数であることに注意する．航空機工学の分野では，これらの量を安定微係数（stability derivative）とよんでいる．

航空機の機体の特徴ならびに簡単化のためにいくつかの安定微係数は 0 であると仮定している．まず機体の左右対称性より $\Delta F_{ay}, \Delta G_x, \Delta G_z$ の $v_x, v_z, \omega_y, \delta_e, \delta_t$ に関する安定微係数は 0 と仮定する．また ΔF_{ax}, ΔF_{az}, ΔG_y は横方向の摂動に対して偶関数になっていると考えて，v_y, ω_x, ω_z, δ_a, δ_r に関する安定微係数は 0 と仮定する．さらに $\partial\Delta F_{ax}/\partial\omega_y, \partial\Delta F_{ax}/\partial\delta_e$, $\partial\Delta F_{ay}/\partial\delta_a$ については，経験上 0 と仮定する．ピッチング・モーメント ΔG_y に関しては，$\dot{v}_z$ の関数であるとも考えて，微係数 $\partial\Delta G_y/\partial\dot{v}_z$ を考慮する．

これより近似式として

$$\Delta F_{ax} = \frac{\partial\Delta F_{ax}}{\partial v_x}v_x + \frac{\partial\Delta F_{ax}}{\partial v_z}v_z + \frac{\partial\Delta F_{ax}}{\partial \delta_t}\delta_t \tag{11.33}$$

$$\begin{aligned}\Delta F_{ay} = &\frac{\partial\Delta F_{ay}}{\partial v_y}v_y + \frac{\partial\Delta F_{ay}}{\partial \omega_x}\omega_x + \frac{\partial\Delta F_{ay}}{\partial \omega_z}\omega_z\\ &+ \frac{\partial\Delta F_{ay}}{\partial \delta_r}\delta_r\end{aligned} \tag{11.34}$$

$$\begin{aligned}\Delta F_{az} = &\frac{\partial\Delta F_{az}}{\partial v_x}v_x + \frac{\partial\Delta F_{az}}{\partial v_z}v_z + \frac{\partial\Delta F_{az}}{\partial \omega_y}\omega_y\\ &+ \frac{\partial\Delta F_{az}}{\partial \delta_e}\delta_e + \frac{\partial\Delta F_{az}}{\partial \delta_t}\delta_t\end{aligned} \tag{11.35}$$

$$\begin{aligned}\Delta G_x = &\frac{\partial\Delta G_x}{\partial v_y}v_y + \frac{\partial\Delta G_x}{\partial \omega_x}\omega_x + \frac{\partial\Delta G_x}{\partial \omega_z}\omega_z\\ &+ \frac{\partial\Delta G_x}{\partial \delta_a}\delta_a + \frac{\partial\Delta G_x}{\partial \delta_r}\delta_r\end{aligned} \tag{11.36}$$

$$\begin{aligned}\Delta G_y = &\frac{\partial\Delta G_y}{\partial v_x}v_x + \frac{\partial\Delta G_y}{\partial v_z}v_z + \frac{\partial\Delta G_y}{\partial \dot{v}_z}\dot{v}_z\\ &+ \frac{\partial\Delta G_y}{\partial \omega_y}\omega_y + \frac{\partial\Delta G_y}{\partial \delta_e}\delta_e + \frac{\partial\Delta G_y}{\partial \delta_t}\delta_t\end{aligned} \tag{11.37}$$

$$\begin{aligned}\Delta G_z = &\frac{\partial\Delta G_z}{\partial v_y}v_y + \frac{\partial\Delta G_z}{\partial \omega_x}\omega_x + \frac{\partial\Delta G_z}{\partial \omega_z}\omega_z\\ &+ \frac{\partial\Delta G_z}{\partial \delta_a}\delta_a + \frac{\partial\Delta G_z}{\partial \delta_r}\delta_r\end{aligned} \tag{11.38}$$

が成り立つものと仮定する．

迎角とすべり角　航空機の運動を表すためには，速度 V_z, V_y ではなく，迎角（angle of attack），すべり角（slip angle）を用いることが多い．迎角の定常値を α_0，摂動項を α，すべり角の定常値は 0 であるとして摂動項を β とする．これらは機体速度と次の関係にある．

$$
\begin{aligned}
\alpha_0 &= \tan^{-1}\frac{V_{z0}}{V_{x0}} \\
\alpha_0+\alpha &= \tan^{-1}\frac{V_{z0}+v_z}{V_{x0}+v_x} \\
\beta &= \sin^{-1}\frac{v_y}{\sqrt{(V_{x0}+v_x)^2+v_y^2+(V_{z0}+v_z)^2}}
\end{aligned}
$$

ここで $|V_{z0}| \ll V_{x0}$ を仮定してと，近似的に

$$\alpha = \frac{v_z}{V_{x0}} \tag{11.39}$$

$$\beta = \frac{v_y}{V_{x0}} \tag{11.40}$$

$$\dot{\alpha} = \frac{\dot{v}_z}{V_{x0}} \tag{11.41}$$

$$\dot{\beta} = \frac{\dot{v}_y}{V_{x0}} \tag{11.42}$$

である．

縦の運動方程式　式 (11.26)-(11.32) に式 (11.33)-(11.38) を代入し，式 (11.39)-(11.42) を用いると，運動方程式は連成しない二つの運動に分かれる．そららを縦の運動方程式，横・方向の運動方程式とよんでいる．

線形化された縦の運動方程式（longitudinal equations of motion）は，v_x, ω_y, θ, α に関する微分方程式

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{d}{dt}-\frac{1}{m}\frac{\partial \Delta F_{ax}}{\partial v_x}\right)v_x-\frac{1}{m}\frac{\partial \Delta F_{ax}}{\partial \alpha}\alpha \\
&+\left(V_{z0}\frac{d}{dt}+g\cos\theta_0\right)\theta=\frac{1}{m}\frac{\partial \Delta F_{ax}}{\partial \delta_t}\delta_t \quad (11.43)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{m}\frac{\partial \Delta F_{az}}{\partial v_x}v_x+\left(V_{x0}\frac{d}{dt}-\frac{1}{m}\frac{\partial \Delta F_{az}}{\partial \alpha}\right)\alpha \\
&-\left\{\left(V_{x0}+\frac{1}{m}\frac{\partial \Delta F_{az}}{\partial \omega_y}\right)\frac{d}{dt}-g\sin\theta_0\right\}\theta \\
&=\frac{1}{m}\frac{\partial \Delta F_{ax}}{\partial \delta_e}\delta_e+\frac{1}{m}\frac{\partial \Delta F_{ax}}{\partial \delta_t}\delta_t \quad (11.44)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{I_{yy}}\frac{\partial \Delta G_y}{\partial v_x}v_x-\left(\frac{1}{I_{yy}}\frac{\partial \Delta G_y}{\partial \dot{\alpha}}\frac{d}{dt}+\frac{1}{I_{yy}}\frac{\partial \Delta G_y}{\partial \alpha}\right)\alpha \\
&+\left(\frac{d^2}{dt^2}-\frac{1}{I_{yy}}\frac{\partial \Delta G_y}{\partial \omega_y}\frac{d}{dt}\right)\theta \\
&=\frac{1}{I_{yy}}\frac{\partial \Delta G_y}{\partial \delta_e}\delta_e+\frac{1}{I_{yy}}\frac{\partial \Delta G_y}{\partial \delta_t}\delta_t \quad (11.45)
\end{aligned}
$$

$$\dot{\theta} = \omega_y \tag{11.46}$$

である．つまり

$$
E=\begin{bmatrix}
1 & 0 & V_{z0} & 0 \\
0 & 0 & -\left(V_{x0}+\frac{1}{m}\frac{\partial \Delta F_{az}}{\partial \omega_y}\right) & V_{x0} \\
0 & 1 & 0 & -\frac{1}{I_{yy}}\frac{\partial \Delta G_y}{\partial \dot{\alpha}} \\
0 & 0 & 1 & 0
\end{bmatrix}
$$

$$
A=\begin{bmatrix}
\frac{1}{m}\frac{\partial \Delta F_{ax}}{\partial v_x} & 0 & -g\cos\theta_0 & \frac{1}{m}\frac{\partial \Delta F_{ax}}{\partial \alpha} \\
\frac{1}{m}\frac{\partial \Delta F_{ax}}{\partial v_x} & 0 & -g\sin\theta_0 & \frac{1}{m}\frac{\partial \Delta F_{ax}}{\partial \alpha} \\
\frac{1}{I_{yy}}\frac{\partial \Delta G_y}{\partial v_x} & \frac{1}{I_{yy}}\frac{\partial \Delta G_y}{\partial \omega_y} & 0 & \frac{1}{I_{yy}}\frac{\partial \Delta G_y}{\partial \alpha} \\
0 & 1 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

$$
B=\begin{bmatrix}
\frac{1}{m}\frac{\partial \Delta F_{ax}}{\partial \delta_t} & 0 \\
\frac{1}{m}\frac{\partial \Delta F_{ax}}{\partial \delta_t} & \frac{1}{m}\frac{\partial \Delta F_{ax}}{\partial \delta_e} \\
\frac{1}{I_{yy}}\frac{\partial \Delta G_y}{\partial \delta_t} & \frac{1}{I_{yy}}\frac{\partial \Delta G_y}{\partial \delta_e} \\
0 & 0
\end{bmatrix}
$$

とおくと

$$
E\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} v_x \\ \omega_y \\ \theta \\ \alpha \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} v_x \\ \omega_y \\ \theta \\ \alpha \end{bmatrix} + B\begin{bmatrix} \delta_t \\ \delta_e \end{bmatrix}
$$

となっている．この線形化されたシステムは行列 $E^{-1}A$ の固有値をモードとしてもつが，それは 4 次多項式であり，一般に

$$\left(s^2+2\zeta_{\rm sp}\omega_{\rm nsp}s+\omega_{\rm nsp}^2\right)\left(s^2+2\zeta_{\rm lp}\omega_{\rm nlp}s+\omega_{\rm nlp}^2\right)$$

のように二つの 2 次式に因数分解できる [KOK]．一つはおもに迎角とピッチ角が変化する運動であり，自然角周波数 $\omega_{\rm nsp}$，減衰係数 $\zeta_{\rm sp}$ はともに大きく，周期が短く減衰が大きいモードである．これを短周期モード（short period mode）という．もう一つは，自然角周波数 $\omega_{\rm nlp}$，減衰係数 $\zeta_{\rm lp}$ がともに小さく，ゆっくりと減衰する周期の長いモードである．これを長周期モード（long period mode）またはフーゴイドモード（phugoid mode）という．

横・方向の運動方程式　一方，線形化された横・方向の運動方程式（lateral-directional equations of motion）

は，$\beta, \omega_x, \omega_z, \phi$ に関する微分方程式

$$\left(V_{x0}\frac{d}{dt}-\frac{1}{m}\frac{\partial \Delta F_{ay}}{\partial \beta}\right)\beta-\left(V_{z0}+\frac{1}{m}\frac{\partial \Delta F_{ay}}{\partial \omega_x}\right)\omega_x$$
$$+\left(V_{x0}-\frac{1}{m}\frac{\partial \Delta F_{ay}}{\partial \omega_z}\right)\omega_z-(g\cos\theta_0)\,\phi$$
$$=\frac{1}{m}\frac{\partial \Delta F_{ay}}{\partial \delta_r}\delta_r \tag{11.47}$$
$$-\frac{1}{I_{xx}}\frac{\partial \Delta G_x}{\partial \beta}\beta+\left(\frac{d}{dt}-\frac{1}{I_{xx}}\frac{\partial \Delta G_x}{\partial \omega_x}\right)\omega_x$$
$$-\left(\frac{I_{xz}}{I_{xx}}\frac{d}{dt}+\frac{1}{I_{xx}}\frac{\partial \Delta G_x}{\partial \omega_z}\right)\omega_z$$
$$=\frac{1}{I_{xx}}\frac{\partial \Delta G_x}{\partial \delta_a}\delta_a+\frac{1}{I_{xx}}\frac{\partial \Delta G_x}{\partial \delta_r}\delta_r \tag{11.48}$$
$$-\frac{1}{I_{zz}}\frac{\partial \Delta G_z}{\partial \beta}\beta-\left(\frac{I_{xz}}{I_{zz}}\frac{d}{dt}+\frac{1}{I_{zz}}\frac{\partial \Delta G_z}{\partial \omega_x}\right)\omega_x$$
$$+\left(\frac{d}{dt}-\frac{1}{I_{zz}}\frac{\partial \Delta G_z}{\partial \omega_z}\right)\omega_z$$
$$=\frac{1}{I_{zz}}\frac{\partial \Delta G_z}{\partial \delta_a}\delta_a+\frac{1}{I_{zz}}\frac{\partial \Delta G_z}{\partial \delta_r}\delta_r \tag{11.49}$$
$$\dot{\phi}=\omega_x+\omega_z\tan\theta_0 \tag{11.50}$$
$$\dot{\psi}=\omega_z\sec\theta_0 \tag{11.51}$$

を得る．これについても（ψ に関する方程式を除外して）状態方程式に記述して係数行列の固有値モードを求めると，一般には

$$(s+\lambda_{\mathrm{S}})\,(s+\lambda_{\mathrm{R}})\left(s^2+2\zeta_{\mathrm{d}}\omega_{\mathrm{nd}}+\omega_{\mathrm{nd}}^2\right)$$

のように二つの 1 次式と一つの 2 次式で表すことができる [KOK]．$0<\lambda_{\mathrm{S}}<\lambda_{\mathrm{R}}$ として，λ_{S} に対応するモードをスパイラルモード（spiral mode），λ_{R} に対応するモードをロールモード（roll mode）という．2 次式が与えるモードをダッチロールモード（Dutch-roll mode）という．航空機によっては $\lambda_{\mathrm{S}}<0$ となり，スパイラルモードは不安定になっているものもある．

スパイラルモードは，時定数の大きな運動であり，おもにロール角とヨー角が変化する．ロールモードは減衰の速い運動であり，おもにロール角速度の減衰を伴う．ダッチロールモードは，ヨー運動とロール角の振動を連成した運動となる．

以上のように，線形近似モデルではあるが，縦の運動方程式と横・方向の運動方程式を用いて，航空機の運動をモードごとに解析することができる．

参考文献

[C] A. Cornish-Bowden, *Fundamentals of Enzyme Kinetics*, Butterworths, 1979.

[G] A. Goldbeter, “A model for circadian oscillations in the Drosophila period protein (PER),” Proceedings of the Royal Society of London. Series B, Vol.261, pp.319–324, 1995.

[KOK] 加藤寛一郎，大屋昭男，柄沢研治, 航空機力学入門, 東京大学出版会, 1982.

[LG] J-C. Leloup, and A. Goldbeter, “A model for circadian rhythms on Drosophila incorporating the formation of a complex between the PER and TIM proteins,” J. Biol. Rhythms, Vol.13, pp.70–87, 1998.

[LGG] J-C. Leloup, D. Gonze, and A. Goldbeter, “Computational models for circadian rhythms : Deterministic versus stochastic approaches,” In : “Computational Systems Biology”, A. Kriete and R. Eils eds, pp. 249–291, Elsevier Academic Press, 2006.

[U] 内田健康, リレー解説生命科学と制御第 3 回 “細胞制御問題のトピックス I — 概日リズムとがん —,” 計測と制御, Vol.46, No.4, pp.325–330, 2007.